

01; 09

© 1990 г. г.

ВРАЩАЮЩИЙСЯ ШАР В ПОЛЕ ВИТКА С ТОКОМ

И. Г. Абламунец, О. П. Прудников

На основе уравнений Максвелла для медленно движущихся сред найден импеданс, вносимый в круговой контур с током, расположенный над вращающимся шаром. Проанализировано влияние скорости вращения на параметры контура. Даны рекомендации по уменьшению скоростного эффекта. Отмечена возможность получения отрицательного вносимого активного сопротивления.

Анализ работы различных устройств контроля параметров движущихся объектов [1] показывает, что, как правило, источником электромагнитного поля служит первичный преобразователь, покоящийся в инерциальной системе отсчета. Созданное им поле взаимодействует с движущимся или вращающимся объектом и несет информацию как об электрофизических свойствах и геометрических параметрах этого объекта, так и о величине и векторе скорости его движения. Для количественного определения картины электромагнитного поля в такой системе необходимо решить граничную задачу электродинамики движущихся сред. Аналогичные задачи возникают в радиолокационной астрономии [2] и астрофизических приложениях [3], при разработке приборов с неконтактным вывешиванием тел в магнитном поле [4] и в ряде других случаев [5, 6].

Изучению электромагнитных полей во вращающихся системах отсчета посвящен ряд работ, анализ которых можно найти в [7, 8]. Наиболее полно в настоящее время разработана теория возбуждения электромагнитных волн вращающимися сторонними источниками [8]. Эти результаты позволяют рассчитывать электромагнитные поля в вакууме во вращающейся и неподвижной системах отсчета и решать задачи дифракции на телах, когда последние можно считать идеально проводящими или на границе можно задать поверхностный импеданс.

Однако если среда, например вращающийся ферромагнитный или диэлектрический шар, обладает электрофизическими свойствами, отличными от свойств вакуума, то связи между полями, индукциями и током проводимости (материальные соотношения) усложняются [9, 10] и непосредственное использование результатов работы [8] оказывается затруднительным. Для таких вращающихся сред задача определения электромагнитного поля до сих пор не решена. В этой связи определенный интерес представляют приближенные решения, одно из которых приведено в [11].

Рассмотрим решение наиболее распространенной задачи по расчету импеданса, вносимого в виток с током I_0 вращающимся шаром. Частота тока пита-

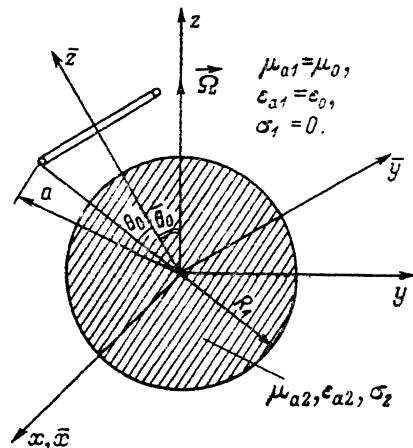


Рис. 1. Виток с током над вращающимся шаром.

ния ω . Обозначения приведены на рис. 1. В общем случае ось витка не совпадает с осью вращения шара, что характеризуется углом θ_0 . С центром шара совмещены две системы декартовых координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и x, y, z , имеющих общую ось, причем ось витка совпадает с осью \bar{z} , а вектор угловой скорости Ω направлен по оси z . Системы сферических координат $\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$ и r, θ, φ (на рисунке не показаны) связаны соответственно с прямоугольными координатами $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и x, y, z обычным образом.

Векторы напряженностей полных полей вне шара обозначим через $E^{(1)}$, $H^{(1)}$, а электрофизические параметры μ_{a1} , ε_{a1} , σ_1 . Представим $E^{(1)}$ в виде суммы напряженностей первичного (падающего) $E^{(1n)}$ и вторичного (отраженного) полей $E^{(1b)}$. Аналогично $H^{(1)} = H^{(1a)} + H^{(1b)}$. В свою очередь падающее поле может быть представлено [12] в виде наложения двух полей $E^{(1n)^\circ}$, $H^{(1n)^\circ}$ и $E^{(1n)^\times}$, $H^{(1n)^\times}$ первое из которых принято называть электрическими волнами, а второе — магнитными и отмечать соответственно верхними индексами э и м. Волны электрического типа, так же как и магнитные, удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Вносимый импеданс находится как отношение эдс, наводимой в витке отраженным полем, к току витка

$$\dot{Z}_{\text{вн}} = -\frac{1}{I_{\text{в}}} \oint_l (E^{(1b)} dl) = -\frac{a \sin \theta_0}{I_{\text{в}}} \int_0^{2\pi} E_{\bar{\varphi}}^{(1b)} d\bar{\varphi}. \quad (1)$$

Первичное поле вне шара определяется током витка и находится по известным формулам [12]. Плотность тока имеет только одну составляющую

$$J_{\bar{\varphi}} = I_{\text{в}} \frac{1}{\bar{r}} \delta(r-a) \delta(\bar{\theta} - \theta_0), \quad (2)$$

где $\delta(x) - \delta$ — функция Дирака.

При этом выражения для коэффициентов разложений падающего поля по системе сферических функций имеют вид

$$\bar{F}_{nm}^{(1n)^\circ} = I_{\text{в}} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{ik_1}{2} \xi_n^{(2)}(k_1 a) \frac{\partial P_n(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} a \sin \theta_0, \quad \bar{F}_{nm}^{(1n)^\times} = 0. \quad (3)$$

Здесь $k_1^2 = \omega^2 \mu_{a1} \varepsilon'_1$, $\varepsilon'_1 = \varepsilon_{a1} (1 + \sigma_1 / i\omega \varepsilon_{a1})$, $\xi_n^{(2)}(x) = \sqrt{\pi/2x} H_{n+1/2}^{(2)}(x)$, $H_{n+1/2}^{(2)}(x)$ — функция Ганкеля второго рода полуцелого порядка.

Таким образом, падающее поле представляется только волнами магнитного типа и не зависит от координаты $\bar{\varphi}$

$$H_{\bar{r}}^{(1n)^\circ} = \frac{1}{\bar{r}} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) U_{\bar{r}nm}^{(1n)^\circ}, \quad H_{\bar{\theta}}^{(1n)^\circ} = \frac{1}{\bar{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 (\bar{r} U_{\bar{r}nm}^{(1n)^\circ})}{\partial \bar{r} \partial \bar{\theta}},$$

$$E_{\bar{\varphi}}^{(1n)^\circ} = \frac{i\omega \mu_{a1}}{\bar{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial (\bar{r} U_{\bar{r}nm}^{(1n)^\circ})}{\partial \bar{\theta}}, \quad E_{\bar{r}}^{(1n)^\circ} = E_{\bar{\theta}}^{(1n)^\circ} = 0, \quad H_{\bar{\varphi}}^{(1n)^\circ} = 0, \quad (4)$$

где $U_{\bar{r}nm}^{(1n)^\circ} = P_n^0(\cos \bar{\theta}) \Psi_n(k_1 \bar{r}) \bar{F}_{nm}^{(1n)^\circ}$, $\bar{r} < a$; $P_n^m(\cos \bar{\theta})$ — присоединенные полиномы Лежандра; $\Psi_n(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{n+1/2}(x)$; $J_{n+1/2}(x)$ — функция Бесселя полуцелого порядка.

Преобразуя векторы $E^{(1n)}$, $H^{(1n)}$ падающего поля в систему координат x, y, z , получим

$$H_r^{(1n)^\circ} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) U_{rnm}^{(1n)^\circ}, \quad E_r^{(1n)^\circ} = 0,$$

$$H_{\theta}^{(1n)^\circ} = \frac{1}{r} \sum_{n=\theta}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (r U_{rnm}^{(1n)^\circ})}{\partial \theta \partial r}, \quad E_{\theta}^{(1n)^\circ} = -\frac{i\omega \mu_{a1}}{r \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (r U_{rnm}^{(1n)^\circ})}{\partial \varphi},$$

$$H_{\varphi}^{(1n)m} = \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (rU_{rnm}^{(1n)m})}{\partial \varphi \partial r}, \quad E_{\varphi}^{(1n)m} = \frac{i\omega \mu_{a1}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (rU_{rnm}^{(1n)m})}{\partial \theta}, \quad (5)$$

где $U_{rnm}^{(1n)m} = P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \Psi_n(k_1 r) F_{nm}^{(1n)m}$,

$$F_{nm}^{(1n)m} = I_B \frac{ik_1}{2} \xi_n^{(2)}(k_1 a) \frac{(2n+1)(n-m)!}{n(n+1)(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) \frac{\partial P_n(\cos \theta_0)}{\partial \theta_0} e^{i(3\pi/2)n} m a \sin \theta_0.$$

Вторичное поле вне шара может содержать не только волны магнитного типа, но и электрического. Поэтому составляющие векторов $E^{(1b)}$, $H^{(1b)}$ должны быть записаны так [12]:

$$E^{(1b)} = E^{(1b)s} + E^{(1b)m}, \quad H^{(1b)} = H^{(1b)s} + H^{(1b)m},$$

$$E_r^{(1b)s} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) U_{rnm}^{(1b)s}, \quad H_r^{(1b)s} = 0,$$

$$E_{\theta}^{(1b)s} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (rU_{rnm}^{(1b)s})}{\partial \theta \partial r}, \quad H_{\theta}^{(1b)s} = \frac{i\omega \varepsilon_1'}{r \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (rU_{rnm}^{(1b)s})}{\partial \varphi},$$

$$E_{\varphi}^{(1b)s} = \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (rU_{rnm}^{(1b)s})}{\partial \varphi \partial r}, \quad H_{\varphi}^{(1b)s} = -\frac{i\omega \varepsilon_1'}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (rU_{rnm}^{(1b)s})}{\partial \theta},$$

$$H_r^{(1b)m} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) U_{rnm}^{(1b)m}, \quad E_r^{(1b)m} = 0,$$

$$H_{\theta}^{(1b)m} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (rU_{rnm}^{(1b)m})}{\partial \theta \partial r}, \quad E_{\theta}^{(1b)m} = \frac{-i\omega \mu_{a1}}{r \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (rU_{rnm}^{(1b)m})}{\partial \varphi},$$

$$H_{\varphi}^{(1b)m} = \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (rU_{rnm}^{(1b)m})}{\partial \varphi \partial r}, \quad E_{\varphi}^{(1b)m} = \frac{i\omega \mu_{a1}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial (rU_{rnm}^{(1b)m})}{\partial \theta}, \quad (6)$$

где $U_{rnm}^{(1b)m} = P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \xi_n^{(2)}(k_1 r) F_{nm}^{(1b)m}$, $U_{rnm}^{(1b)s} = P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \xi_n^{(2)}(k_1 r) F_{nm}^{(1b)s}$; $F_{nm}^{(1b)s}$, $F_{nm}^{(1b)m}$ — неизвестные коэффициенты.

Векторы напряженностей электрического и магнитного полей во вращающемся шаре обозначим $E^{(2)}$, $H^{(2)}$, а электрофизические параметры μ_{a2} , ε_{a2} , σ_2 . Вторичное поле во вращающемся шаре может быть найдено по формулам, приведенным в работе [11] для случая медленно движущихся сред. Условием медленности является допущение, что

$$1 - \tilde{\beta}^2 \approx 1, \quad (7)$$

где $\tilde{\beta} = \Omega r \sin \theta / c$, c — скорость света.

В современных устройствах параметр $\tilde{\beta}$ мал, что позволяет с большой степенью точности применять это соотношение. Используя [11], вторичное поле во вращающемся шаре, представленное разложением по системе сферических функций, определим так:

$$E^{(2)} = E^{(2)s} + E^{(2)m}, \quad H^{(2)} = H^{(2)s} + H^{(2)m},$$

$$E_r^{(2)s} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{n(n+1)}{r^2} (rU_{rnm}^{(2)s}) + \frac{x_2 \tilde{\beta}^2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (rU_{rnm}^{(2)s})}{\partial \varphi^2} + \frac{i\omega x_2 \tilde{\beta}}{cr \sin \theta} \frac{\partial (rU_{rnm}^{(2)s})}{\partial \varphi} \right],$$

$$E_{\theta}^{(2)s} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (rU_{rnm}^{(2)s})}{\partial \theta \partial r}, \quad E_{\varphi}^{(2)s} = \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (rU_{rnm}^{(2)s})}{\partial \varphi \partial r},$$

$$H_r^{(2)\text{в}} = -\frac{\chi_2 \tilde{\beta}}{\mu_{a2} c} E_\theta^{(2)\text{в}},$$

$$H_\theta^{(2)\text{в}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{i \omega \varepsilon'_2}{r \sin \theta} \frac{\partial (r U_{rnm}^{(2)\text{в}})}{\partial \varphi} - \frac{\chi_2 \tilde{\beta}}{\mu_{a2} c r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial (r U_{rnm}^{(2)\text{в}})}{\partial \theta} \right],$$

$$H_\varphi^{(2)\text{в}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[-\frac{i \omega \varepsilon'_2}{r} \frac{\partial (r U_{rnm}^{(2)\text{в}})}{\partial \theta} - \frac{\chi_2 \tilde{\beta}}{\mu_{a2} c r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 (r U_{rnm}^{(2)\text{в}})}{\partial \theta \partial \varphi} \right],$$

$$E_r^{(2)\text{м}} = \frac{\chi_2 \tilde{\beta}}{\varepsilon'_2 c} H_\theta^{(2)\text{м}},$$

$$E_\theta^{(2)\text{м}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[-\frac{i \omega \mu_{a2}}{r \sin \theta} \frac{\partial (r U_{rnm}^{(2)\text{м}})}{\partial \varphi} + \frac{\chi_2 \tilde{\beta}}{\varepsilon'_2 c r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial (r U_{rnm}^{(2)\text{м}})}{\partial \theta} \right],$$

$$E_\varphi^{(2)\text{м}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{i \omega \mu_{a2}}{r} \frac{\partial (r U_{rnm}^{(2)\text{м}})}{\partial \theta} + \frac{\chi_2 \tilde{\beta}}{\varepsilon'_2 c r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 (r U_{rnm}^{(2)\text{м}})}{\partial \theta \partial \varphi} \right],$$

$$H_r^{(2)\text{м}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{n(n+1)}{r^2} (r U_{rnm}^{(2)\text{м}}) + \frac{\chi_2 \tilde{\beta}^2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (r U_{rnm}^{(2)\text{м}})}{\partial \varphi^2} + \frac{i \omega \chi_2 \tilde{\beta}}{c r \sin \theta} \frac{\partial (r U_{rnm}^{(2)\text{м}})}{\partial \varphi} \right],$$

$$H_\theta^{(2)\text{м}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (r U_{rnm}^{(2)\text{м}})}{\partial \theta \partial r}, \quad H_\varphi^{(2)\text{м}} = \frac{1}{r \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial^2 (r U_{rnm}^{(2)\text{м}})}{\partial \varphi \partial r}, \quad (8)$$

где $U_{rnm}^{(2)\text{в}} = P_n(\cos \theta) e^{-i m \varphi} \Psi_n(k_{2m} r) F_{nm}^{(2)\text{в}}$, $U_{rnm}^{(2)\text{м}} = P_n(\cos \theta) e^{-i m \varphi} \Psi_n(k_{2m} r) F_{nm}^{(2)\text{м}}$,

$$k_{2m} = \sqrt{k_2^2 - \frac{\chi_2 \omega \Omega m}{c^2} - \frac{\chi_2' \omega \Omega m}{c^2} + \frac{\chi_2 (\Omega m)^2}{c^2}}, \quad k_2^2 = \omega^2 \mu_{a2} \varepsilon'_2,$$

$\chi_2 = c^2 \mu_{a2} \varepsilon_{a2} - 1$, $\chi_2' = c^2 \mu_{a2} \varepsilon_2' - 1$, $\varepsilon_2' = \varepsilon_{a2} (1 + \sigma_2 / i \omega \varepsilon_{a2})$, а неизвестные коэффициенты $F_{nm}^{(2)\text{в}}$, $F_{nm}^{(2)\text{м}}$ подлежат определению из граничных условий.

Для выполнения граничных условий на вращающейся сферической поверхности раздела сред достаточно, чтобы были непрерывны касательные к поверхности раздела составляющие векторов напряженностей электрического $\mathbf{E}_\tau = i_\varphi E_\theta - i_\theta E_\varphi$ и магнитного $\mathbf{H}_\tau = i_\varphi H_\theta - i_\theta H_\varphi$ полей. При этом получается следующая система уравнений относительно неизвестных коэффициентов $F_{nm}^{(1\text{в})\text{в}}$, $F_{nm}^{(2)\text{в}}$, $F_{nm}^{(1\text{в})\text{м}}$, $F_{nm}^{(2)\text{м}}$:

$$-\mu_{a1} \xi_n^{(2)}(k_1 R_1) F_{nm}^{(1\text{в})\text{м}} + \mu_{a2} \Psi_n(k_{2m} R_1) F_{nm}^{(2)\text{м}} = \mu_{a1} \Psi_n(k_1 R_1) F_{nm}^{(1\text{в})\text{м}},$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial R_1} R_1 [-\xi_n^{(2)}(k_1 R_1) F_{nm}^{(1\text{в})\text{м}} + \Psi_n(k_{2m} R_1) F_{nm}^{(2)\text{м}}] +$$

$$+ \frac{\chi_2 \Omega}{\mu_{a2} c^2} B_n^{(2)\text{в}}(k_{2m} R_1) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial R_1} [R_1 \Psi_n(k_1 R_1)] F_{nm}^{(1\text{в})\text{м}},$$

$$-\varepsilon_2' \xi_n^{(2)}(k_1 R_1) F_{nm}^{(1\text{в})\text{в}} + \varepsilon_2' \Psi_n(k_{2m} R_1) F_{nm}^{(2)\text{в}} = 0,$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial R_1} R_1 [-\xi_n^{(2)}(k_1 R_1) F_{nm}^{(1\text{в})\text{в}} + \Psi_n(k_{2m} R_1) F_{nm}^{(2)\text{в}}] + \frac{\chi_2' \Omega}{\varepsilon_2' c^2} B_n^{(2)\text{м}}(k_{2m} R_1) = 0, \quad (9)$$

и где

$$B_n^{(2)\text{в},\text{м}}(k_{2m} R_1) = \frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3} \Psi_{n+1}(k_{2m} R_1) F_{n+1, m}^{(2)\text{в},\text{м}} -$$

$$-\frac{(n-1)(n-m)}{2n-1} \Psi_{n-1}(k_{2m} R_1) F_{n-1, m}^{(2)\text{в},\text{м}}.$$

Система линейных алгебраических уравнений (9) является рекуррентной, так как содержит неизвестные с различными значениями индекса n . В общем

случае она не может быть разделена на две системы уравнений, каждая из которых содержала бы только коэффициенты разложений электрических или магнитных волн, как это имеет место для неподвижных сред [12]. Хотя поля во вращающихся средах и представляются в виде суперпозиции (8) волн электрического и магнитного типов, удовлетворяющих по отдельности уравнениям Максвелла, наличие вращающихся сферических границ раздела сред приводит к завязке электрических и магнитных волн: их коэффициенты разложений оказываются связанными между собой. В результате, даже если стороннее (возбуждающее) поле представляется только волнами магнитного типа, вторичные поля будут содержать также волны электрического типа.

Отметим, что если вращающимся телом является немагнитный проводник, то $\kappa_2 = 0$, $\kappa_2' \neq 0$. При этом (9) распадается на две системы уравнений, одна из которых содержит только коэффициенты разложений волн магнитного типа, причем эта система уже не является рекуррентной, так как включаются коэффициенты с одинаковыми индексами n и m . Вторая же система содержит как коэффициенты разложений электрических, так и магнитных волн. Но поскольку для магнитных волн они находятся независимо, то и эта система имеет простое решение.

Решение (9) можно существенно упростить, если наряду с (7) ввести еще одно приближенное равенство

$$1 - \kappa_2 \tilde{\beta}^2 \approx 1. \quad (10)$$

В самом деле, для параметров, входящих в (10), из практики электромагнитного контроля имеем следующие максимальные оценки: $\kappa_2 \approx 10^4$, $\tilde{\beta} \approx 10^{-5}$. Следовательно, (10) выполняется с большой степенью точности. При этом решение (9), например, относительно $F_{nm}^{(1n)m}$ имеет вид

$$F_{nm}^{(1n)m} = - \frac{\mu_{a1} \Psi_n(k_1 R_1) \frac{\partial}{\partial R_1} [R_1 \Psi_n(k_{2m} R_1)] - \mu_{a2} \Psi_n(k_{2m} R_1) \frac{\partial}{\partial R_1} [R_1 \Psi_n(k_1 R_1)]}{\mu_{a1} \xi_n^{(2)}(k_1 R_1) \frac{\partial}{\partial R_1} [R_1 \Psi_n(k_{2m} R_1)] - \mu_{a2} \Psi_n(k_{2m} R_1) \frac{\partial}{\partial R_1} [R_1 \xi_n^{(2)}(k_1 R_1)]} F_{nm}^{(1n)m}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (6) и преобразуя сферические гармоники [13] из системы координат x, y, z в систему координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, найдем напряженность электрического поля $E_{\bar{\varphi}}^{(1n)}$, после чего может быть вычислен вносимый импеданс (1).

Если пренебречь волновыми процессами вне шара и в шаре, т. е. принять $\mu_{a1} = \mu_0$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $k_1^2 \rightarrow 0$, $k_2^2 = -i\omega\mu_{a2}\sigma_2$, учесть асимптотические соотношения для функций Бесселя и Ганкеля и обозначить

$$\alpha_1 = \frac{R_1}{a}, \quad \beta = R_1 \sqrt{\omega\mu_{a2}\sigma_2}, \quad \tau = \frac{\Omega}{\omega}, \quad (12)$$

то выражение для вносимого импеданса запишется так:

$$\dot{Z}_{\text{вн}} = 2\pi a \sin^2 \theta_0 \omega \mu_0 (\xi_{1c} + i\xi_{2c}), \quad (13)$$

где ξ_{1c} , ξ_{2c} — безразмерные функции и

$$\xi_{1c} + i\xi_{2c} = i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_1^{2n+1} \frac{1}{2n(n+1)} [P_n^1(\cos \theta_0)]^2 \times \left\{ F_n(0) [P_n^0(\cos \theta_0)]^2 + \sum_{m=1}^n [F_n(m) + F_n(-m)] \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [P_n^m(\cos \theta_0)]^2 \right\}, \quad (14)$$

$$F_n(m) = \frac{k_{2m} R_1 \Psi_{n-1}(k_{2m} R_1) - \left[n + (n+1) \frac{\mu_{a2}}{\mu_0} \right] \Psi_n(k_{2m} R_1)}{n \left(1 - \frac{\mu_{a2}}{\mu_0} \right) \Psi_n(k_{2m} R_1) - k_{2m} R_1 \Psi_{n-1}(k_{2m} R_1)}, \quad (15)$$

$k_{2m} R_1 = (1/\sqrt{2}) \beta \sqrt{|\tau \cdot m - 1|} (1 \pm i)$; знак плюс берется, если $\tau \cdot m - 1 \geq 0$, знак минус — при $\tau \cdot m - 1 < 0$.

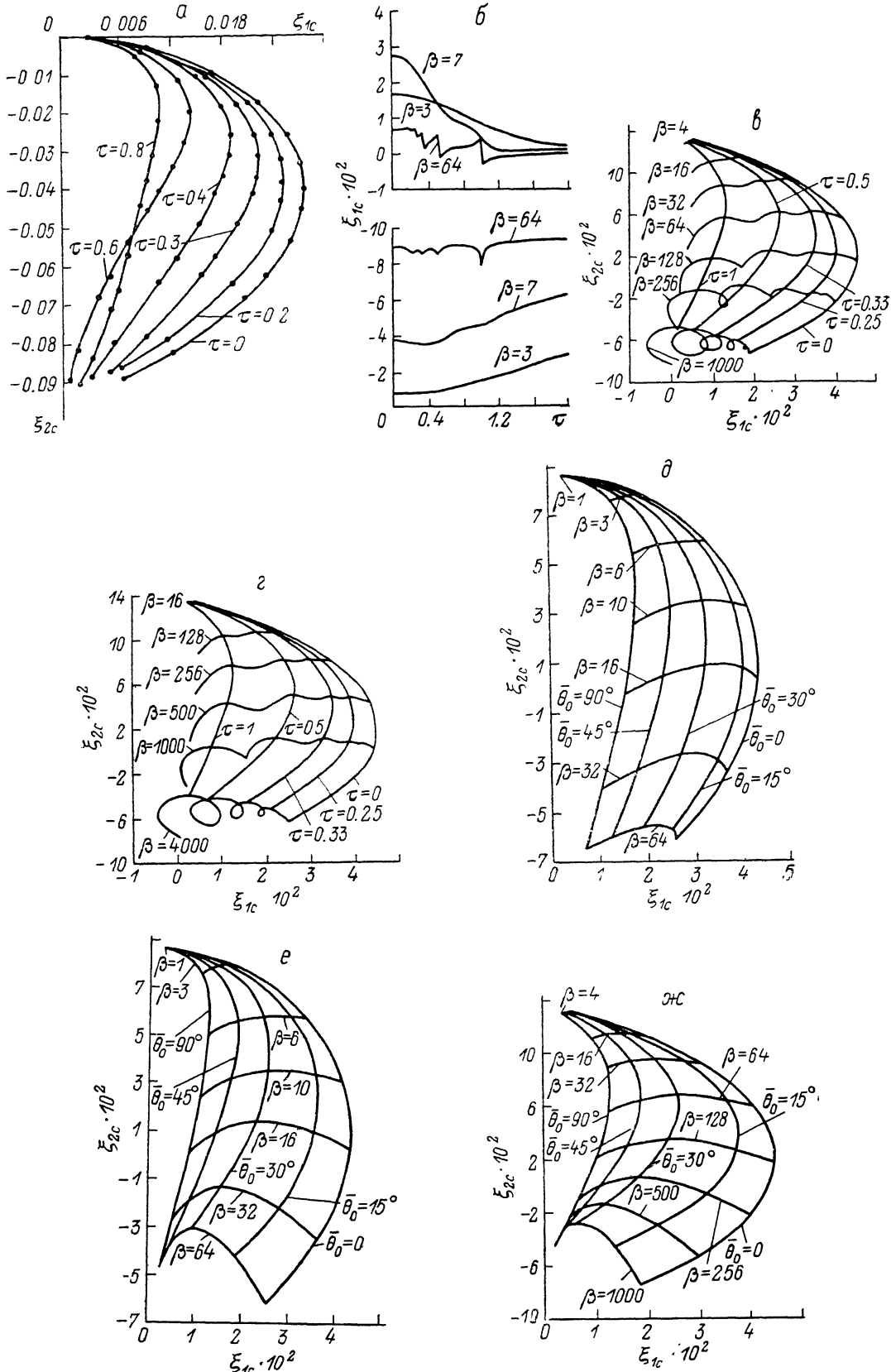


Рис. 2. Зависимости функций ξ_{1c} , ξ_{2c} от обобщенных параметров α , \bar{R} , β , τ , μ_{a2}/μ_0 и угла $\bar{\theta}_0$ ($\bar{R}=0.5$).

$\alpha=0.2$ (а—з); $\mu_{a2}/\mu_0=1$ (а, б), 50 (в, ж), 300 (з, а), 5 (д, е, ж); $\bar{\theta}_0=90^\circ$ (а—з, и); $\tau=0.8$ (б), 1.0 (е—з). Точки на кривых соответствуют $\beta=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 16, 32, 64$, (а).

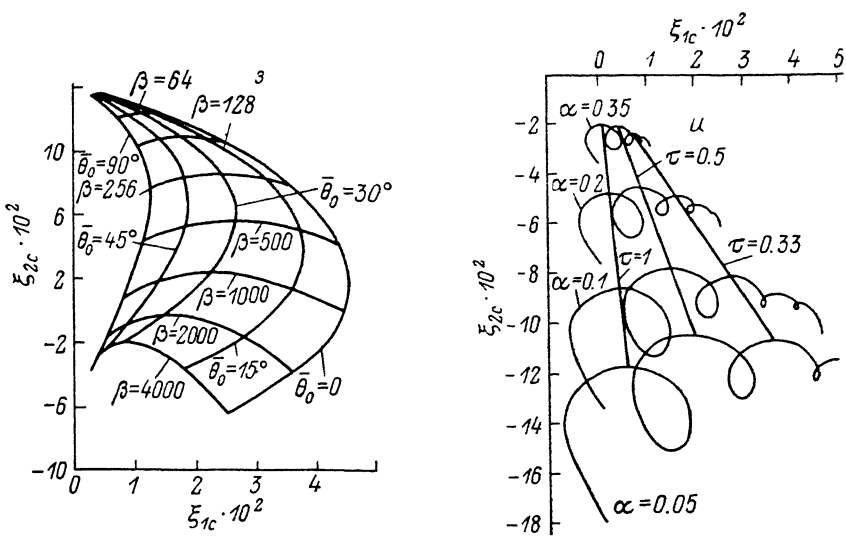


Рис. 2 (продолжение).

Из (14) следует, что вносимый в виток импеданс зависит от электрофизических свойств сред, геометрических размеров витка и шара, от угловой скорости вращения шара и угла между вектором этой скорости и осью возбуждающего витка.

Если шар неподвижен, то $\Omega=0$, $F_n(m)=F_n(-m)=F_n(0)$, а из теоремы сложения для полиномов Лежандра следует

$$[P_n^0(\cos \bar{\theta}_0)]^2 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [P_n^m(\cos \bar{\theta}_0)]^2 = P_n^0(1) = 1.$$

При этом (13), (14) переходят в известные [1] выражения для импеданса, вносимого в круговой контур неподвижным шаром.

Если $\bar{\theta}_0=0$, то $P_n^m(1)=0$ для $m \neq 0$ и $P_n^0(1)=1$, а вносимый импеданс не зависит от скорости вращения шара. В общем же случае эта зависимость оказывается весьма сложной.

Функция (14) просчитывалась на вычислительной машине. При этом были введены два обобщенных параметра, принятые в [1]. Это отношение радиуса витка R_n к радиусу шара

$$\tilde{R} = \frac{R_n}{R_1} = \frac{a \sin \theta_0}{R_1} = \frac{\sin \theta_0}{\alpha_1} \quad (16)$$

и отношение зазора h между витком и шаром к радиусу шара

$$\alpha = \frac{h}{R_1} = \frac{a \cdot \cos \theta_0 - R_1}{R_1} = \frac{\cos \theta_0}{\alpha_1} - 1. \quad (17)$$

На рис. 2, а приведены зависимости функций ξ_{1c} и ξ_{2c} от обобщенного фактора скорости τ для ряда значений параметра β . Видно, что увеличение τ приводит к искажению характеристики преобразователя. Для приведенных значений τ искажения годографа, вызванные вращением контролируемого сферического изделия, качественно соответствуют скоростному эффекту, вызванному движущимся плоским изделием. Однако более подробные расчеты показали, что скоростной эффект на вращающихся телах имеет ряд особенностей, например, годографы для $\tau=0.6$ и 0.8 (рис. 2, а) пересекаются, что не наблюдается для плоских изделий [14, 15].

На рис. 2, б приведены зависимости функций ξ_{1c} и ξ_{2c} для тех же значений обобщенных параметров α , \tilde{R} , μ_{c2}/μ_0 , угла $\bar{\theta}_0$, что и на рис. 2, а, и трех значений β , но просчитанных с шагом 0.01 по τ . Оказалось, что функции ξ_{1c} , ξ_{2c} имеют ряд экстремумов, которые наиболее ярко выражены при $\beta \geq 64$. Уменьшение

параметра β приводит к сглаживанию функций, а при $\beta=3$ экстремумы полностью исчезают и зависимость от параметра τ принимает такой же вид, как и в случае контроля движущихся плоских изделий. На рис. 2, б экстремумы вносимой индуктивности соответствуют следующим значениям фактора скорости τ : 1.0, 0.5, 0.33, 0.25, которые являются членами ряда $\sum_{m=1}^{\infty} (1/m)$. Этим же значениям τ соответствует резкий переход вносимого активного сопротивления от максимума к минимуму на рис. 2, б.

Анализ выражений (14), (15) показывает, что при указанных значениях τ существуют пространственные гармоники электромагнитного поля во вращающемся шаре, для которых аргумент сферической функции Бесселя обращается в нуль, т. е. $\tau \cdot m - 1 = 0$. Для таких гармоник создаются особые условия существования, следствием которых и является отмеченный эффект. Физически его можно объяснить тем, что вихревые токи, индуцированные в шаре в некоторый момент времени, не успевают полностью затухнуть за время полного оборота шара, вносят определенный вклад в результирующее поле и изменяют тем самым параметры преобразователя. В самом деле, для покоящегося шара ток проводимости $\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}$. Поэтому рассеяние электромагнитных волн на шаре всегда сопровождается потерей мощности P_n на нагревание среды в объеме V шара

$$P_n = \int_V (\mathbf{j}_c \cdot \mathbf{E}) dV = \sigma \int_V |\mathbf{E}|^2 dV > 0. \quad (18)$$

Иначе обстоит дело, если шар вращается. В этом случае ток проводимости имеет вид [11]

$$\mathbf{j}_c = \sigma (\mathbf{E} + c [\tilde{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{V}]). \quad (19)$$

Дополнительный член в (19) приводит к изменению фазовых соотношений, в результате ток проводимости зачастую оказывается в противофазе с действующим на него электрическим полем \mathbf{E} . При этом фазовые и амплитудные соотношения вторичного поля могут настолько измениться, что вносимое активное сопротивление становится отрицательным, как это имеет место на рис. 2, б для $\beta=64$. В этом случае среда не поглощает энергию электромагнитной волны. Другими словами, происходит усиление электромагнитной волны за счет вращения тела. На возможность такого усиления впервые обратил внимание Я. Б. Зельдович [16], рассмотрев энергетические соотношения на границе вращающегося проводящего тела.

Учитывая важность отмеченного явления, изучим более подробно причины его возникновения. С этой целью определим мощность P_{Σ} , излучаемую через сферическую поверхность S , расположенную концентрично вращающемуся шару и имеющую радиус R_2 такой, что $R_1 < R_2 < a$. Это можно сделать [12] с помощью вектора Пойнтинга $\mathbf{P} = 1/2 [\mathbf{E} \times \dot{\mathbf{H}}]$, вычислив интеграл

$$P_{\Sigma} = \text{Re} \int (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (E_{\theta}^{(1)} \cdot \dot{H}_{\varphi}^{(1)*} - E_{\varphi}^{(1)} \cdot \dot{H}_{\theta}^{(1)*}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (20)$$

и приняв $r=R_2$. В (20) \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S . Мощность P_{Σ} определяет разность между потоком энергии, уходящим от шара, и потоком энергии, падающим на шар. Если $P_{\Sigma} < 0$, то уходящая энергия меньше входящей, т. е. шар поглощает часть энергии. Если же $P_{\Sigma} > 0$, то в объеме, ограниченном поверхностью S , происходит усиление падающего поля за счет сторонних источников энергии, сосредоточенных в этом объеме. Мощность P_{Σ} складывается из мощностей отдельных пространственных гармоник так, что

$$P_{\Sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n P_{\Sigma nm}. \quad (21)$$

Подставляя (5), (6) в (20) и пренебрегая, как и раньше, волновыми процессами вне шара и в шаре, получим

$$P_{\Sigma} = -I_{\Sigma}^2 \pi a \sin^2 \theta_0 \omega \mu_0 \cdot \xi_{1c}, \quad (22)$$

где ξ_{1c} определяется выражением (14).

Из (22) следует, что мощность P_{Σ} зависит от скорости вращения шара и угла θ_0 между вектором этой скорости и осью возбуждающего витка. Сравнивая (13) и (22), приходим к выводу, что вносимое сопротивление отрицательно в том случае, когда мощность излучения положительна. Определим, какие из пространственных гармоник в этом случае усиливаются вращающимся шаром. Наглядный результат получается, если принять, что $|k_{2m} R_1| \ll 1$, и для простоты положить $\mu_{a2}/\mu_0 = 1$. Используя в (15) приближенные значения функций Бесселя, получим

$$P_{\Sigma nm} = -I_{\Sigma}^2 \pi a \sin^2 \theta_0 \omega \mu_0 (1 - \tau \cdot m) W_{nm}, \quad (23)$$

$$W_{nm} = \left(\frac{R_1}{a}\right)^{2n+1} \frac{\beta^2}{4n+2} \left(1 - \frac{4n+2}{4n+6}\right) \frac{1}{2n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [P_n^m(\cos \theta_0) P_n^i(\cos \theta_0)]^2. \quad (24)$$

Так как $W_{nm} > 0$ всегда, то знак $P_{\Sigma nm}$ определяется знаком множителя $1 - \tau m$. Следовательно, пространственные гармоники с индексами $m > 1/\tau$ усиливаются за счет энергии вращения шара. Поскольку частота усиливаемых колебаний не связана целочисленным соотношением с угловой скоростью вращения тела (на рис. 2, б это область значений τ) и мгновенное состояние системы не зависит от времени, то само явление нельзя отнести к параметрическим. Возможность получения отрицательного вносимого сопротивления является принципиальной особенностью взаимодействия электромагнитного поля преобразователя с вращающимся телом. Более подробно с усилением электромагнитных волн в присутствии движущихся сред можно ознакомиться по работе [17].

Наибольшие изменения вносимых параметров происходят в окрестности значения $\tau = 1$. Пик вносимой индуктивности острый и ярко выраженный, а переход вносимого активного сопротивления от максимума к минимуму весьма резкий, что может быть использовано при разработке устройств контроля и регулирования скорости вращения сферических роторов электрических машин, гидроскопов, силовых маховиков и т. д. Однако при дефектоскопии вращающихся сферических тел эти же особенности могут быть восприняты измерительной системой как дефекты на поверхности тела.

На рис. 2, в, г приведены годографы вносимого импеданса, отличающиеся значениями относительной магнитной проницаемости. Скоростной эффект просчитывался для указанных на рисунках значений β с шагом по τ 0.01 от 0 до 2. Видно, что зависимость вносимого сопротивления от фактора скорости τ носит весьма сложный характер, особенно при больших β . Внешне она напоминает удлиненную циклоиду, образуя увеличивающиеся в размерах петли. С уменьшением β петли исчезают, ход кривых сглаживается, постепенно принимая вид, как и в случае движущихся плоских изделий.

Скоростной эффект максимален, когда угол θ_0 между осью витка и вектором угловой скорости шара равен 90° . Изменения его в большую или меньшую сторону приводят к уменьшению скоростного эффекта. На рис. 2, д—з приведены годографы вносимого сопротивления для значений фактора скорости $\tau = 0.8, 1.0$ (рис. 2, д, е) и относительной магнитной проницаемости $\mu_{a2}/\mu_0 = 5, 50, 300$ (рис. 2, е—з). Отметим, что общей закономерностью является отсутствие влияния вращения шара на вносимые параметры, когда ось витка совпадает с вектором угловой скорости шара, т. е. при $\theta_0 = 0$. В этом случае годограф вносимого сопротивления совпадает с аналогичным годографом в статике. Увеличение θ_0 приводит к искажению статического годографа, которое, как уже отмечалось, достигает максимального значения при $\theta_0 = 90^\circ$. Наиболее быстрые изменения годографа происходят при значениях угла θ_0 в диапазоне 0—30. С увеличением фактора скорости τ эти изменения происходят с большей скоростью. Отмеченная закономерность может быть использована при построении систем ориентации и стабилизации положения объекта с помощью трехстепенного (сферического) гироскопа. При дефектоскопии или контроле электрофизических и геометрических параметров сферических изделий быстрые прохождения под

датчиком оси вращения могут быть восприняты как дефекты или отклонения от заданных свойств.

Скоростной эффект зависит от сочетания обобщенных параметров μ_{a2}/μ_0 и β . Эта зависимость отличается от аналогичной зависимости для равномерно движущихся сред. Как следует из приведенных рисунков, при малых значениях β скоростной эффект мал или полностью отсутствует. Увеличение β приводит к увеличению скоростного эффекта, а затем, как и для равномерно движущихся сред, к его уменьшению. Диапазон β , в котором этот параметр оказывает влияние на величину скоростного эффекта, зависит от отношения μ_{a2}/μ_0 и для немагнитных сред ($\mu_{a2}/\mu_0=1$) составляет приблизительно интервал 1—300 (рис. 2, б). Увеличение μ_{a2}/μ_0 приводит к увеличению диапазона влияния β ; так, при $\mu_{a2}/\mu_0=50$ скоростной эффект наблюдается еще при $\beta=1000$ (рис. 2, в), а при $\mu_{a2}/\mu_0=300$ — при $\beta=4000$ (рис. 2, г). Для больших β (для которых вно-

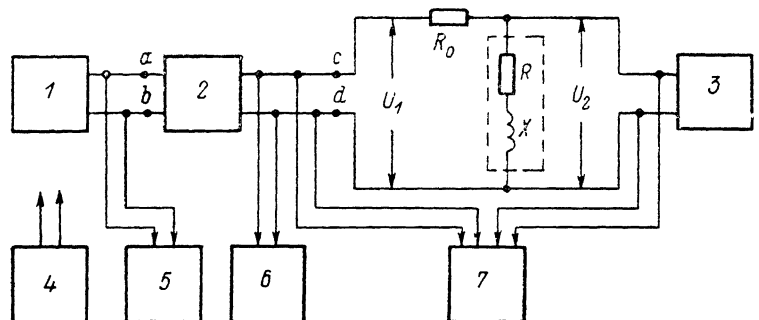


Рис. 3. Схема измерений.

симое активное сопротивление достигло максимального значения и стало убывать) одинаковый скоростной эффект наблюдается при одновременном увеличении параметров μ_{a2}/μ_0 и β в одинаковое число раз.

На рис. 2, и приведены годографы вносимого сопротивления для некоторых значений параметра α , характеризующего зазор безопасности между преобразователем и вращающимся шаром. Его влияние на вносимые параметры аналогично влиянию такого же параметра α при контроле равномерно движущихся сред. При $\alpha=0.1$ и $\tau=0.1$ погрешность от скоростного эффекта составляет 1—2 % и уменьшается с увеличением α . Для надежного исключения скоростного эффекта необходимо выбирать $\tau \leq 0.01$.

Экспериментальная проверка выявленных в работе закономерностей проводилась на авиационном гироскопе, цилиндрический маховик (ротор) которого служил контролируемым объектом. В зоне контроля ротор имел диаметр 108 мм. Частота вращения маховика регулировалась напряжением постоянного тока. Для измерения этой частоты использовался участок вала ротора, имеющий 12 зубьев, прохождение которых регистрировалось магнитной головкой с последующей передачей сигналов на частотомер ЧЗ-32. Частота вращения ротора достигала в экспериментах 15 000 об./мин.

Схема измерений представлена на рис. 3. Сигнал от генератора сигналов низкой частоты ГЗ-102 1 через усилитель мощности 2 подавался на делитель, состоящий из прецизионного резистора $R_0=15$ Ом и вихретокового преобразователя, имеющего активное сопротивление R и индуктивное сопротивление X . Входной сигнал делителя U_1 измерялся вольтметром В7-28 б, а выходной сигнал U_2 — вольтметром 3. Сдвиг фазы φ между этими напряжениями измерялся цифровым фазометром Ф2-16 7. Точное значение частоты генератора 1 выставлялось по частотомеру ЧЗ-34 5. В точках а, б и с, д контролировался коэффициент гармоник K_2 по прибору 4 (измерителю нелинейных искажений С6-7).

Параметры вихретокового преобразователя R и X находились по формулам

$$R = R_0 \frac{\bar{u} \cdot \cos \varphi - \bar{u}^2}{1 + \bar{u}^2 - 2\bar{u} \cdot \cos \varphi}, \quad X = R_0 \frac{\bar{u} \cdot \sin \varphi}{1 + \bar{u}^2 - 2\bar{u} \cdot \cos \varphi}, \quad (25)$$

где $\bar{u} = U_2/U_1$.

Следует отметить, что в теоретической части работы рассматривался круговой виток, расположенный над вращающимся шаром.

Однако в экспериментах воспроизвести эти условия не удалось из-за малых величин R и X рассмотренного преобразователя. По той же причине не удалось использовать тонкостенные катушки. Описываемые ниже результаты получены для вихрекового преобразователя, представляющего собой П-образный дроссель, магнитопровод которого выполнен на сердечнике М1000НН-5 ПП8 $\times 5 \times 7$. Полюса преобразователя располагались вдоль образующей цилиндра, таким образом, его магнитный поток замыкался через вращающийся вал. Коэффициент гармоник для такого преобразователя не превышал в точках a, b измерительной схемы 0.2 %, а в точках c, d — 1.5 %.

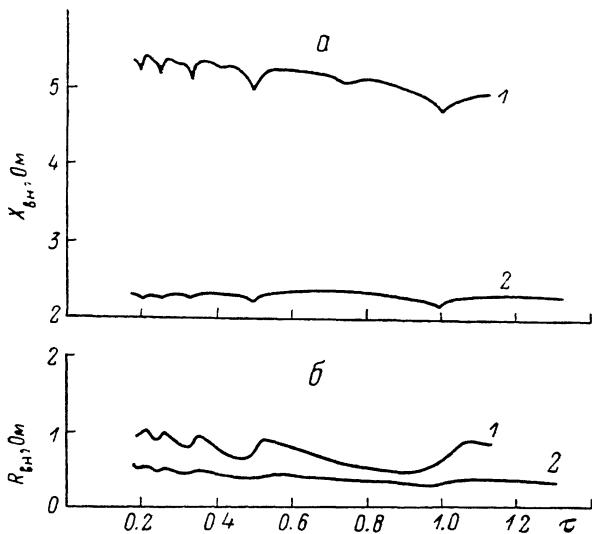


Рис. 4. Зависимости вносимых параметров $R_{вн}$, $X_{вн}$ от обобщенного фактора скорости τ .
1 — $f=200$, 2 — 100 Гц.

Собственные параметры преобразователя R_c и X_c находились по формулам (25) при удалении преобразователя от вала на расстояние более 100 мм. Вносимые параметры определялись по формулам

$$R_{вн} = R - R_c, \quad X_{вн} = X - X_c. \quad (26)$$

Результаты экспериментов представлены на рис. 4 в виде зависимостей $R_{вн}$ и $X_{вн}$ от обобщенного фактора скорости $\tau = \Omega/\omega$ (Ω — круговая частота вращения ротора, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота тока питания преобразователя). Видно, что эти зависимости имеют ряд экстремумов, которые наиболее ярко выражены при больших значениях частоты тока питания преобразователя. Уменьшение f приводит к сглаживанию кривых. Экстремумы вносимой индуктивности соответствуют следующим значениям фактора скорости τ : 1.0, 0.5, 0.33, 0.25, 0.2. Этим же значениям соответствуют переходы вносимого активного сопротивления от минимума к максимуму. Однако в отличие от теоретических результатов эти переходы не являются столь резко выраженными, что, по-видимому, связано с большими размерами экспериментального преобразователя. Наибольшие изменения вносимых параметров происходят в окрестности значения $\tau=1$.

Таким образом, выполненные эксперименты могут служить качественным подтверждением части закономерностей, выявленных в работе.

Список литературы

- [1] Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий. Справочник / Под ред. В. В. Клюева. М.: Машиностроение, 1976. Кн. 2. 326 с.
- [2] Петров Б. М. // РиЭ. 1972. Т. 17. № 9. С. 1799—1806.
- [3] Цыган А. И. // Астрономический журн. 1980. Т. 57. № 1. С. 73—77.

- [4] *Линьков Р. В., Урман Ю. М.* // ЖТФ. 1978. Т. 48. Вып. С. 1123—1131.
- [5] *Меерович Э. А.* Методы релятивистской электродинамики в электротехнике. М.; Л.: Энергия, 1966. 192 с.
- [6] *Поливанов К. М.* Электродинамика движущихся тел. М.: Энергоатомиздат, 1982. 192 с.
- [7] *Болотовский Б. М., Столяров С. Н.* // Эйнштейновский сборник, 1974. М.: Наука, 1976. С. 179—275.
- [8] *Петров Б. М.* // Антенны / Под ред. А. А. Пистолькорса. М.: Радио и связь, 1976. Вып. 24. С. 81—94.
- [9] *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. 520 с.
- [10] *Новаку В.* Введение в электродинамику. М.: ИЛ, 1963. 303 с.
- [11] *Абламунец И. Г.* // Изв. вузов. Электромеханика. 1988. № 3. С. 10—17.
- [12] *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
- [13] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. 296 с.
- [14] *Абламунец И. Г., Старобинский Н. М., Шатерников В. Е.* // Изв. вузов. Электромеханика. 1974. № 11. С. 1195—1202.
- [15] *Абламунец И. Г., Шатерников В. Е.* // Дефектоскопия. 1977. № 1. С. 14—20.
- [16] *Зельдович Я. Б.* // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 14. Вып. 4. С. 270—272.
- [17] *Болотовский Б. Н., Столяров С. Н.* // Эйнштейновский сборник, 1977. М.: Наука, 1980. С. 73—130.

Куйбышевский архитектурно-строительный
институт

Поступило в Редакцию
27 февраля 1989 г.