

01; 10

© 1990 г.

НЕЛИНЕЙНЫЕ РАВНОВЕСНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЛАЗЕРЕ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

Ю. И. Богданов

Предложена простая аналитическая модель, позволяющая связать выходные параметры комптоновского лазера на свободных электронах (амплитуду и нелинейный сдвиг частоты излучения, а также эффективный тепловой разброс захваченного электронного пучка) с входными параметрами (расстройкой от резонанса и энергетическим разбросом влетающих электронов). Результаты представлены в безразмерном виде, что позволяет легко использовать их в конкретных случаях. Отмечается хорошее согласие с численными расчетами.

В настоящей работе рассматриваются лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) высокого усиления, в которых можно пренебречь полем пространственного заряда сгруппированного пучка (так называемые комптоновские ЛСЭ в отличие от рамановских, связанных с возникновением волны пространственного заряда). Действие таких приборов основано на явлении радиационной неустойчивости, которое возникает при взаимодействии электронного пучка с пространственно-периодическим магнитным полем ондулятора (см., например, [1]).

Совместное влияние поля излучения и ондулятора на электроны, приводящее к группировке частиц в продольном направлении, эффективно сводится к действию так называемой волны пондеромоторного потенциала. Волна пондеромоторного потенциала, двигаясь со скоростью, несколько меньшей скорости электронов, интенсивно взаимодействует с ними, что приводит к замедлению электронов и росту волны.

Обмен энергией между излучением и пучком прекратится (происойдет насыщение), когда пучок в среднем замедлится до скорости волны. Изучение конечного состояния эволюции системы электронный пучок—излучение и представляет основную задачу настоящей работы.

Предлагаемая модель базируется на определенном выборе нелинейных равновесных состояний, принадлежащих классу БГК (Бернштейна, Грина, Крускала) решений [2], а также на законах сохранения, непосредственно следующих из динамических уравнений системы и позволяющих связать конечное состояние с начальным.

Следует отметить, что конечное состояние ЛСЭ не совпадает с состоянием, соответствующим максимальному полю излучения и соответственно максимальному КПД. Однако простые качественные соображения, подтверждающиеся численно, позволяют по известному асимптотическому КПД приближенно определить и максимальный КПД.

1. Динамические уравнения и законы сохранения

Ограничимся построением одномерной теории, т. е. будем считать, что все величины зависят только от продольной координаты z и времени t . Для определенности будем рассматривать ондулятор, создающий спиральное магнитное поле

$$A_0 = A_0(e_x \cos k_0 z + e_y \sin k_0 z), \quad (1)$$

где A_0 — амплитуда векторного потенциала, $l = 2\pi/k_0$ — период ондулятора.

Векторный потенциал волны излучения круговой поляризации представим в виде

$$A = A_s(z) [e_x \cos(kz - \omega t - \varphi(z)) - e_y \sin(kz - \omega t - \varphi(z))], \quad (2)$$

где A_s и φ — медленные амплитуда и фаза.

Считаем, что ω и k — постоянные действительные числа и, вообще говоря, $\omega \neq kc$, где c — скорость света в вакууме. Введем комплексную амплитуду поля излучения $A = A_s \exp(i\varphi)$. Тогда динамика ЛСЭ будет определяться уравнениями

$$-2i \frac{\omega}{c^2} \dot{A} - 2k(\Delta k) A = \frac{\omega_{p0}^2 A_0}{\gamma c^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(i\xi_j) \right), \quad (3)$$

$$\ddot{\xi}_j = \frac{e^2 k^2 A_0 A_s}{m^2 c^2 \gamma_s^2 \gamma_z^2} \sin(\xi_j - \varphi), \quad (4)$$

где $\xi_j = (k + k_0) z_j - \omega t$, $\Delta k = k - \omega/c$; считаем, что $\Delta k \ll k_0$; $\omega_{p0}^2 = 4\pi n_0 e^2 / m$, n_0 — макроскопическая концентрация электронов, т. е. усредненная на масштабе одной длины волны; e и m — заряд и масса электрона; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $\gamma_s = (1 - v_s^2/c^2)^{-1/2}$, v и v_s — средние поперечная и продольная скорости электронов; считаем, что $\gamma \gg 1$, $\gamma_s \gg 1$. Точка сверху означает производную по времени взаимодействия электронов с излучением $\tau \approx z/c$. Усреднение в правой части (3) происходит также на масштабе одной длины волны (точнее на масштабе $2\pi/(k + k_0)$), N — полное число частиц, по которым происходит усреднение.

Выражение (3) следует из уравнений Максвелла, (4) есть хорошо известное уравнение маятника. Уравнения (3) и (4) связаны между собой, потому что динамика частиц определяется излучением, и наоборот.

Движение электронов можно представить себе нагляднее, если воспользоваться понятием пондеромоторного потенциала. Легко видеть, что (4) представляет собой не что иное, как уравнение движения частицы с «продольной» массой $m\gamma\gamma_s^2$ в поле с потенциалом $U = e^2 A_0 A_s / (m\gamma c^2)$.

Динамическая система (3), (4) допускает два первых интеграла:

$$A \dot{A} + \frac{4\pi n_0 m c \gamma \gamma_s^2}{k^3} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \dot{\xi}_j \right) = C_1, \quad (5)$$

$$A \dot{A} + \frac{2\pi n_0 m \gamma \gamma_s^2}{k^3 \Delta k} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \dot{\xi}_j^2 \right) + \frac{\omega_{p0}^2 A_0 A_s}{\gamma c^2 k \Delta k} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos(\xi_j - \varphi) \right) = C_2, \quad (6)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Уравнение (5) можно назвать законом сохранения импульса, (6) — законом сохранения энергии.

2. Нелинейные электромагнитные волны

Сосредоточим теперь внимание на состоянии равновесия между излучением и электронным пучком. Речь идет о случае, когда $\dot{A} = 0$ в уравнении (3), отдельные электроны движутся в ямах пондеромоторного потенциала, однако в целом распределение стационарно. Такие состояния в ЛСЭ возникают в результате насыщения радиационной неустойчивости.

Целью настоящей работы является описание конечного состояния системы излучение—электронный пучок без детального анализа динамики частиц в поля, что может быть достигнуто только путем постулирования вида стационарной функции распределения электронов в насыщении.

Из физических соображений ясно, что сгруппированный вблизи дна ямы пондеромоторного потенциала электронный пучок обладает некоторым эффективным тепловым разбросом, даже если влетающий в ондулятор пучок был монохроматическим, поэтому вполне разумной является попытка ашпроксимировать

состояние электронов в насыщении распределением Максвелла—Больцмана. «Температура» Θ будет тогда феноменологическим параметром модели, определяемым в конечном итоге законами сохранения.

Итак, пусть распределение электронов в конечном состоянии имеет вид

$$f(\xi, \dot{\xi}) = C \exp\left(-\frac{m\gamma \dot{\xi}^2}{2(k+k_0)^2 \Theta} - \frac{U(\xi)}{\Theta}\right), \quad (7)$$

где C — нормировочная постоянная.

Очевидно, что $\dot{\xi}/(k+k_0)$ есть скорость электрона относительно пондеромоторной волны. Во избежание недоразумений отметим, что в конечном состоянии поле A действительно. Подставив (7) в (3), можно получить

$$\Delta k = \frac{\omega_{p0}^2 A_0}{2\gamma c^2 k A} \frac{I_1(\psi)}{I_0(\psi)}, \quad (8)$$

где $\psi = e^2 A_0 A / (m\gamma c^2 \Theta)$, $I_0(\psi)$ и $I_1(\psi)$ — модифицированные функции Бесселя.

Поясним происхождение уравнения (8). Функция $I_1(\psi)$ возникает при интегрировании фазового множителя $\exp(i\xi)$ на одном периоде с весом, задаваемым бoльцмановской экспонентой. $I_0(\psi)$ следует из условия сохранения средней (макроскопической) плотности электронного пучка, т. е. из условия нормировки. Смысл выражения (8) можно понять и без расчетов. Действительно, $I_1(\psi)/I_0(\psi) \rightarrow 1$ при $\psi \rightarrow \infty$, как и должно быть, так как при нулевой температуре все электроны покоятся на дне ямы пондеромоторного потенциала, т. е. $\exp(i\xi) = -1$ для каждого электрона. В случае наличия теплового разброса усреднение по фазам электронов даст величину, по модулю меньшую единицы.

Выражение (8) можно рассматривать как нелинейное дисперсионное уравнение, так как оно фактически задает $k(\omega)$ в зависимости от амплитуды волны. Для слабых полей ($\psi \ll 1$) дисперсионное уравнение, согласно (8), не зависит от поля.

3. Основные результаты

Следующий шаг состоит в том, чтобы посредством законов сохранения (5) и (6) связать конечное состояние системы, задаваемое (7) и (8), с начальным состоянием. Будем считать, что в начальном состоянии поле отсутствует ($A=0$), а электроны движутся в среднем со скоростью v_{z0} и имеют среднеквадратичный энергетический разброс $\Delta\gamma$, где

$$\Delta\gamma = \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\gamma_j - \gamma)^2 \right]^{1/2}.$$

Величину $\xi_0 = (k+k_0)v_{z0} - \omega$ разложим на две части $\xi_0 = \nu + \Delta kv_{z0}$, где $\nu = k_0 v_{z0} - \omega(1 - v_{z0}/c)$ — расстройка от резонанса. По смыслу ν является входным параметром ЛСЭ, в то время как Δk характеризует конечное состояние волны излучения. В дальнейшем для удобства будем считать все параметры безразмерными. Для перехода от безразмерных величин к размерным необходимо совершить следующие преобразования:

$$A \rightarrow \left(\frac{16\pi^2 \gamma_z^2 n_0^2 e^2 A_0}{k^4} \right)^{1/3} A, \quad (9)$$

$$\Theta \rightarrow \left(\frac{16\pi^2 \gamma_z^2 n_0^2 e^8 A_0^4}{m^3 \gamma^3 c^6 k^3} \right)^{1/3} \Theta, \quad (10)$$

$$\Delta k \rightarrow \left(\frac{4\pi n_0 k e^4 A_0^2}{m^3 \gamma^3 \gamma_z^2 c^3} \right)^{1/3} \Delta k, \quad (11)$$

$$\nu \rightarrow \left(\frac{4\pi n_0 k e^4 A_0^2}{m^3 \gamma^3 \gamma_z^2 c^3} \right)^{1/3} \nu. \quad (12)$$

Удобно также ввести параметр начального теплового разброса σ

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \left(\frac{4\pi n_0 \gamma_0^3 e^4 A_0^2}{k^2 m^3 \gamma_0^3 c^6} \right)^{1/2} \sigma. \quad (13)$$

Тогда из уравнений (5)—(8) можно получить

$$A^2 = \nu + \Delta k, \quad (14)$$

$$A^2 + \frac{\Theta}{2\Delta k} - \frac{AI_1(A/\Theta)}{\Delta k I_0(A/\Theta)} = \frac{1}{2\Delta k} ((\nu + \Delta k)^2 + \sigma^2), \quad (15)$$

$$\Delta k = \frac{I_1(A/\Theta)}{2AI_0(A/\Theta)}. \quad (16)$$

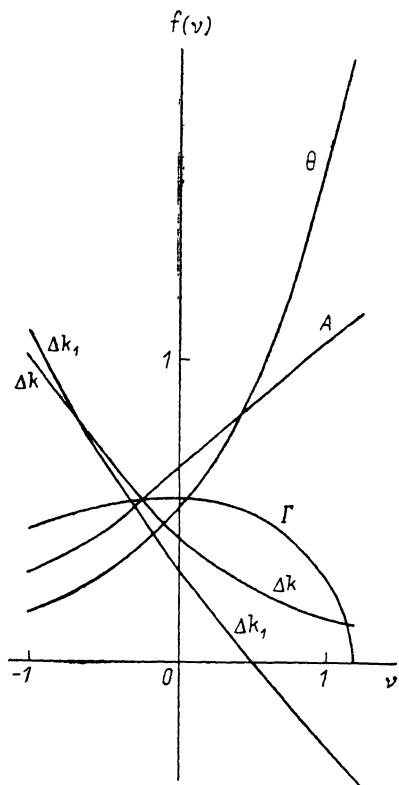


Рис. 1.

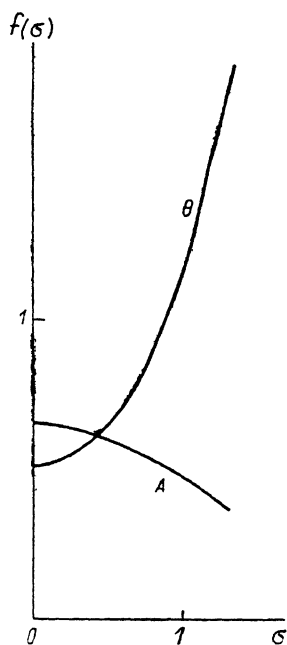


Рис. 2.

Система уравнений (14)—(16) позволяет найти выходные характеристики ЛСЭ (A , Δk , Θ), если известны входные параметры (ν , σ). Ее анализ провести довольно несложно, если ввести вспомогательный параметр

$$\psi = A/\Theta. \quad (17)$$

Тогда можно получить

$$A^3 + \frac{\sigma^2}{A} = \left(\frac{1}{\psi} - \frac{I_1(\psi)}{I_0(\psi)} \right), \quad (18)$$

$$A^3 - \nu A = \frac{I_1(\psi)}{2I_0(\psi)}. \quad (19)$$

Пусть вначале фиксирован параметр σ . Тогда из (18) получаем зависимость A от ψ , после чего по формулам (16), (17), (19) определяем все остальные параметры. Напротив, если фиксирована расстройка, то начинать следует с уравнения (19).

Для иллюстрации на рис. 1, 2 представлены два наиболее важных случая. Рис. 1 показывает выходные параметры ЛСЭ в зависимости от расстройки при отсутствии у электронов теплового разброса в начальном состоянии, а также инкремент Γ и действительный сдвиг частоты Δk_1 , следующие из линейного дисперсионного уравнения [1]. На рис. 2 показано влияние начального теплового разброса на выходные характеристики ЛСЭ при нулевой расстройке ($\nu=0$, $\Delta k=A^2$).

Теперь обратимся к оценке максимального поля, возникающего в системе за время эволюции. Можно показать, что динамические уравнения допускают решения, соответствующие сильным синхротронным колебаниям ступков в ямах пондеромоторного потенциала. При этом скорость ступка может колебаться в пределах от ξ_0 до $-\xi_0$, а поле изменяться практически от нуля до максимально возможного.

Как показывает численный расчет, такие колебания действительно возникают в процессе установления равновесия. Максимальному полю будет соответствовать, согласно закону сохранения (5), случай, когда средняя скорость электронов равна $-\xi_0$, а не нулю, как в конечном состоянии. Максимальное поле будет примерно в $\sqrt{2}$ раз выше, чем поле в конечном состоянии, а КПД соответственно примерно в два раза больше.

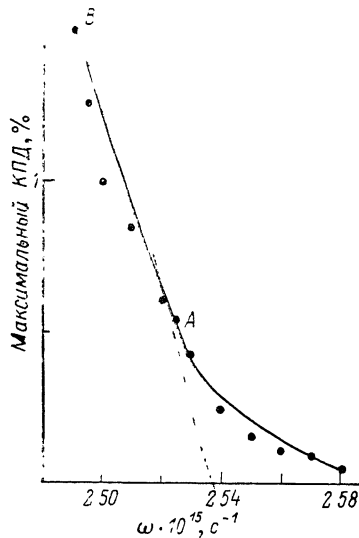


Рис. 3. Максимальный КПД в зависимости от частоты волны излучения для примера 1 работы [3].

Точки — численный расчет [3], сплошная кривая — результаты настоящей работы. Точки А и В характеризуют насыщение волны соответственно максимального и нулевого инкрементов.

На рис. 3 для конкретного ЛСЭ показано, что существует хорошее согласие между численными расчетами, проведенными в [3], и результатами настоящей работы.

4. Обсуждение

Рассмотренные выше нелинейные волны лишь приближенно являются монохроматическими, в частности, существует слабое излучение на высших гармониках. Действительно, в конечном состоянии плотность заряда является периодической функцией с периодом $2\pi/(k+k_0)$. В разложении Фурье высшие гармоники плотности заряда не обязательно малы по сравнению с основной, однако они в отличие от основной не являются резонансными. Нетрудно показать, что полем высших гармоник можно пренебречь, если $\Delta k \ll k_0$, что практически всегда выполняется.

Результаты настоящей работы показывают, что максвелл-болцмановская аппроксимация для функции распределения в конечном состоянии позволяет предсказать КПД ЛСЭ с высокой точностью, практически не уступающей точности численных расчетов, основанных на методе крупных частиц (см. [3]).

Достоинством развиваемого подхода является возможность простого и однозначного определения выходных характеристик излучения и электронного пучка, причем с учетом возможного энергетического разброса частиц в начальном состоянии.

Обычно оценка эффективности (см., например, [1]) основывается на уравнении (5) с использованием Δk , взятого из линейного дисперсионного уравнения. Использование уравнения (6) позволяет достичь значительного увеличения точности по сравнению с оценкой, приведенной в [1].

Можно показать, что существование закона сохранения (6) связано с гамильтоновым характером системы излучение—электронный пучок. Это обстоятельство формально может приводить к отсутствию равновесных состояний в си-

стеме. Фактически же равновесные состояния, подобные рассмотренным в разделе 2, всегда возникают как в реальных, так и в численных экспериментах. Это можно связать с такими негамильтоновыми факторами как пространственный заряд, немонахроматичность излучения, флуктуации параметров электронного пучка и ондулятора, постепенная потеря информации в численных расчетах из-за их ограниченной точности и т. п. Такие факторы относительно слабо влияют на общий баланс энергии и импульса в системе, задаваемый выражениями (5) и (6), однако с течением времени существенно искажают детальный характер движения, делая необходимым переход от динамического описания к статистическому.

Изучению асимптотических состояний ЛСЭ посвящена и работа [4]. Эта работа, однако, физически ошибочна, потому что не учитывает сдвиг частоты Δk , играющий принципиальную роль (см. (25), (26) в [4]).

Автор благодарит В. К. Гришину, А. А. Коломенского, Г. В. Мартиросяна и И. И. Пахомова за внимание к работе.

Список литературы

- [1] Sprangle P., Smith R. A. // Phys. Rev. A. 1980. Vol. 21. N 1. P. 293—301.
- [2] Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D. // Phys. Rev. 1957. Vol. 108. N 3. P. 546—550.
- [3] Sprangle P., Tang C. M., Manheimer W. M. // Phys. Rev. A. 1980. Vol. 21. N 1. P. 302—318.
- [4] Lane B., Davidson R. C. // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 27. N 4. P. 2008—2025.

Научно-исследовательский
институт ядерной физики
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в Редакцию
30 ноября 1988 г.