

01; 04; 10

© 1990 г.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИОНОВ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ ПРИ НИЗКИХ ДАВЛЕНИЯХ

С. П. Никулин

Излагается метод анализа ионных распределений в потенциальной яме при низких давлениях, основанный на раздельном рассмотрении «уходящих» и «захваченных» частиц, причем при анализе функции распределения захваченных частиц последовательно рассмотрены сравнительно медленный процесс релаксации частиц по энергии и свободные колебания, частота которых существенно превышает характерную частоту столкновений. Получено интегральное уравнение, учитывающее возможный уход захваченных частиц в продольном направлении, и рассмотрены возможности его упрощения в различных предельных ситуациях.

Для получения ионных и электронных пучков широко применяются газоразрядные источники [1, 2]. Принципиальной особенностью таких источников является использование в них разрядов низкого давления, что обусловлено необходимостью обеспечить высокую электрическую прочность ускоряющего промежутка. Обычно в разрядах низкого давления потенциал плазмы выше потенциала любого из электродов и при анализе ионных распределений принимают, что ионы уходят на стенки в режиме свободного полета. Вместе с тем возможна и противоположная ситуация, когда ионы оказываются запертыми в потенциальной яме. Такая ситуация реализуется в разрядах низкого давления в магнитном поле (например, в пеннинговских разрядах [1]), а также при прохождении электронного пучка через остаточный газ [3]. Для последнего случая известны две модели, рассматривающие различные предельные ситуации.

В модели [4] предполагается, что причиной ухода ионов из области пучка является осевой градиент электрического поля и плотность ионного заряда определяется формулой

$$\rho_i(z) = \int_0^z \frac{I \varepsilon(\varphi) p dz'}{\pi R^2 \sqrt{(2e/m) (\varphi(z') - \varphi(z))}} \quad (1)$$

где  $I$  — ток пучка,  $\varepsilon$  — коэффициент ионизации,  $p$  — давление,  $R$  — размер пучка,  $e$  — элементарный заряд,  $m$  — масса иона,  $\varphi(z)$  — продольное распределение потенциала.

Уравнение (1) справедливо в том случае, когда продольная составляющая электрического поля значительно превосходит поперечную составляющую [3]. Поперечный ионный профиль будет в этом случае близок к профилю электронного пучка (в (1) распределение по поперечной координате принимается равномерным). В работе [6] для поперечного профиля использована функция Больцмана  $\rho = \rho_0 \exp(-e\varphi/kT_r)$ , где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T_r$  — температура. Такая ситуация возможна при незначительной скорости ухода ионов из области пучка как в продольном, так и в поперечном направлениях, когда глубина ямы отвечает условию

$$\varphi_R \gg \frac{kT_r}{e} \quad (2)$$

В общем случае (2) не выполняется, поперечное ионное распределение может существенно отличаться от бoльцмановского. Для его нахождения необходимо решение кинетического уравнения

$$v_x \frac{\partial f(x, v_x)}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f(x, v_x)}{\partial v_x} = I_{\text{ст}}(x, v_x, f) \quad (3)$$

с граничными условиями  $f(R, v_x) = 0$  при  $v_x < 0$ ,  $f(-R, v_x) = 0$  при  $v_x > 0$  (если в рассматриваемую область ионы извне не попадают), где  $I_{\text{ст}}$  — интеграл столкновений;  $x, v_x$  — поперечные координата и скорость. В настоящей работе рассматривается стационарная задача в плоской геометрии и излагается метод расчета ионных распределений в потенциальной яме при низких давлениях.

## 1. Поперечное распределение ионов

При выполнении условия низкого давления

$$\lambda_i \gg R, \quad (4)$$

где  $\lambda_i$  — длина свободного пробега иона, кинетическое уравнение можно существенно упростить. Частица, образовавшаяся в точке  $x$  со скоростью  $v_x$ , удовлетворяющей условию  $mv_x^2/2 > e\varphi(R) - e\varphi(x)$  с большей вероятностью уйдет из потенциальной ямы, так как при выполнении условия (4) вероятность столкновения на пути от точки  $x$  до края ямы пренебрежимо мала, таким образом, можно принять, что вклад в интеграл столкновений внесут только захваченные частицы, для которых  $(mv_x^2/2) + e\varphi(x) < e\varphi(R)$ . Представим функцию распределения в виде суммы  $f(x, v_x) = f_s(x, v_x) + f_{yx}(x, v_x)$ , где  $f_s$  и  $f_{yx}$  — соответственно функции распределения захваченных и уходящих частиц. При сделанном допущении интеграл столкновений зависит только от вида функции  $f_s$  и уравнение (4) распадается на два уравнения для функций  $f_s$  и  $f_{yx}$

$$v_x \frac{\partial f_s}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_s}{\partial v_x} = I_{\text{ст}}(x, v_x, f_s) \eta(e\varphi(R) - e\varphi(x) - \frac{mv_x^2}{2}), \quad (5)$$

$$v_x \frac{\partial f_{yx}}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_{yx}}{\partial v_x} = I_{\text{ст}}(x, v_x, f_s) \eta(e\varphi(x) + \frac{mv_x^2}{2} - e\varphi(R)), \quad (6)$$

где  $\eta(y) = 1$  при  $y > 0$  и  $\eta(y) = 0$  при  $y < 0$ .

Уравнение (5) можно подвергнуть дальнейшему упрощению при использовании следующего подхода. Из выполнения условия (4) следует, что характерная частота столкновений  $\nu_{\text{ст}}$  много меньше частоты колебаний в потенциальной яме  $\nu_{\text{юл}}$  (поскольку  $\nu_{\text{ст}} \sim \bar{v}_i/\lambda_i$ ,  $\nu_{\text{юл}} \sim \bar{v}_i/R$ , где  $\bar{v}_i$  — средняя скорость иона), т. е. большую часть времени ионы совершают свободные колебания. Столкновения, при которых меняется энергия иона  $E$  и соответственно амплитуда колебаний  $a$  (переход к амплитуде  $E = e\varphi(a)$  возможен при соблюдении симметрии  $\varphi(x) = \varphi(-x)$ , что обычно выполняется), редки, и поэтому нахождение ионного распределения  $f_s(x, v_x)$  можно разбить на 2 этапа: сначала рассмотреть сравнительно медленный процесс релаксации частиц по энергии или амплитуде, определить соответствующую функцию распределения  $f(a)$ , а затем выразить  $f_s(x, v_x)$  через  $f(a)$ , считая, что частицы совершают свободные колебания. Для функции, зависящей от амплитуды, левая часть (5) обращается в нуль и (5) принимает вид

$$I_{\text{ст}}(a, f(a)) \eta(\varphi(R) - \varphi(a)) = 0. \quad (5)$$

Такой подход реализован для электронного газа, но без учета условий образования и ухода частиц в работе [6], где проведена подробная процедура преобразования кинетического уравнения в фазовом пространстве к уравнению в пространстве интегралов движения. В настоящей работе связь между  $f_s(x, v_x)$  и  $f(a)$  и интегральное уравнение для  $f(a)$  получим непосредственно из физических соображений.

Частица, находясь в точке  $x$ , будет иметь скорость в промежутке  $v_x - v_x + dv_x$  в том случае, если ее амплитуда находится в промежутке  $a - a + da$ , где  $a$ ,  $da$  связаны с  $v_x$ ,  $dv_x$  следующими соотношениями:

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{2e}{m} (\varphi(a) - \varphi(x))} \equiv \pm v(a, x), \quad (7)$$

$$dv_x = \frac{e}{m} \frac{d\varphi(a)}{da} \frac{da}{v(a, x)}. \quad (8)$$

Относительное время нахождения такой частицы в промежутке  $x - x + dx$

$$W_1(a, x) = \frac{dt(a, x)}{T(a)} \text{ при } |x| < a, \quad (9)$$

где  $dt(a, x) = dx/v(a, x)$ ,  $T(a) = 4 \int_0^a dx/v(a, x)$  — период колебаний.

Таким образом, для числа ионов в элементе  $dx dv_x$  фазового пространства получаем соотношение

$$f_s(x, v_x) dx dv_x = \frac{f(a) da dt(a, x)}{T(a)}. \quad (10)$$

Подставляя в (10) соотношения (8), (9), получим

$$f_s(x, v_x) = f(a(x, v_x)) \left[ T(a(x, v_x)) \frac{e}{m} \frac{d\varphi(a(x, v_x))}{da} \right]^{-1}, \quad (11)$$

где  $a(x, v_x) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + (mv_x^2/2))$ ;  $\varphi^{-1}$  — функция, обратная  $\varphi(x)$ .

Интегрируя  $f_s(x, v_x)$  по всем возможным скоростям, получим распределение ионов по поперечной координате

$$f_s(x) = \int_{-v_m}^{v_m} f_s(x, v_x) dv_x = 2 \int_{|x|}^R \frac{f(a) da}{T(a) v(a, x)}, \quad (12)$$

где  $v_m = v(R, x) = v(a, x)|_{a=R}$ .

Уменьшение числа частиц в промежутке  $a - a + da$  происходит за счет столкновений и равно  $v(a) f(a) da$ , где  $v(a)$  — усредненная по периоду колебаний частота столкновений. Новые частицы появляются как за счет столкновений, в результате которых частица, имевшая амплитуду  $a'$ , попадает в промежуток  $a - a + da$ , так и за счет ионизации. В общем виде интегральное уравнение можно записать следующим образом:

$$-v(a) f(a) + I_i(a) + \int_0^R W(a, a') v(a') f(a') da' = 0, \quad (13)$$

где  $I_i(a)$  — распределение ионов, образующихся в единицу времени в результате ионизации;  $W(a, a')$  — плотность вероятности для иона, имевшего амплитуду  $a'$ , приобрести в результате столкновения амплитуду  $a$ . Следует заметить, что  $\int_0^R W(a, a') da < 1$ , так как часть частиц в результате столкнове-

ния получит энергию, достаточную для преодоления потенциального барьера. Образование новых ионов происходит, как правило, при ионизации электронным ударом и определяется параметрами электронного распределения, энергией пучка или температурой электронной компоненты плазмы. Пренебрегая передачей энергии от электрона к образовавшемуся иону, можно принять, что в момент появления ионы имеют максвелловское распределение по скоростям и тогда для  $I_i$  получаем следующее выражение:

$$I_i(a) = \int_{-a}^a W_2(a, x) I_i(x) dx = 2 \int_0^a W_2(a, x) I_i(x) dx, \quad (14)$$

где  $I_i(x) = \nu_i f_e(x)$ ,  $\nu_i$  — частота ионизации,  $f_e$  — электронное распределение,

$$W_2(a, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi m k T_r}} \exp\left(-\frac{mv^2(a, x)}{2kT_r}\right) \frac{e}{v(a, x)} \frac{d\varphi}{da}$$

— плотность вероятности для иона, образовавшегося в точке  $x$ , приобрести амплитуду колебаний  $a$ .

Изменение энергии ионов в случае слабоионизованного газа происходит в основном в результате их столкновений с атомами, для учета которых широко применяется модельный интеграл [7], учитывающий сохранение числа частиц,

$$I_a(x, v_x, f) = -\frac{f(x, v_x)}{\tau} + \frac{f(x)}{\tau} f_m(v_x), \quad (15)$$

где  $\tau$  — характерное время между столкновениями,  $f_m$  — максвелловская функция с температурой нейтрального газа.

Нейтральные частицы, находящиеся в кнудсеновском режиме (поскольку сечения рассеяния для атомов и ионов являются величинами одного порядка), свободно контактируют со стенками и  $T_r$  можно принять равной температуре стенок камеры. Как видно из (15), для любого иона частота столкновений считается одинаковой  $\nu(a) = 1/\tau$ , в результате столкновений образуются ионы с максвелловским распределением по скоростям, следовательно,

$$W(a, a') = 2 \int_{-\min\{a, a'\}}^{\min\{a, a'\}} W_1(a', x) W_2(a, x) dx, \quad (16)$$

где  $2W_1(a', x) dx$  — вероятность для иона с амплитудой  $a'$  испытать столкновение в слое  $dx$  при условии, что столкновение произошло.

Следует заметить, что при значительных отклонениях функции распределения от равновесной использование модельного интеграла (15) является нецелесообразным, поскольку основным для ионов в собственном газе является процесс перезарядки, сечение которого  $\sigma_{пер}$  слабо зависит от скорости, и для частиц, обладающих высокими скоростями, частота столкновений увеличивается. При учете перезарядки обычно принимают  $\sigma_{пер} \sim \text{const}$ . При таком допущении  $\nu_{пер}(a) = N \sigma_{пер} v(a) = N \sigma_{пер} ((4a/T(a)))$ , где  $N$  — концентрация нейтрального газа, а вероятность перезарядки в любой точке  $x$  внутри промежутка  $[-a; a]$  одинакова  $W_{пер}(x, a) = (2a)^{-1}$ . В процессе перезарядки взаимодействующие частицы практически не меняют своих скоростей, поэтому распределение вновь образованных ионов по скоростям можно принять максвелловским, следовательно,

$$W_{пер}(a, a') = \frac{1}{a'} \int_0^{\min\{a, a'\}} W_2(a, x) dx. \quad (17)$$

Если решение уравнения (13) найдено, то, перейдя от  $f(a)$  к  $f_s(x, v_x)$ , можно затем определить явный вид интеграла столкновений и проинтегрировать уравнение (6) для  $f_{yx}(x, v_x)$ . В момент времени  $t$  в точке  $x$  скорость  $v_x$  будут иметь частицы, образовавшиеся в некоторый момент времени  $t' < t$ , в точке  $x'$  со скоростью  $v'_x$

$$f_{yx}(x, v_x) = \int_{t_0}^t I_{от}(x', v'_x, f_s) \eta \left( \frac{mv_x^2}{2} + e\varphi(x') - e\varphi(x) \right) dt', \quad (18)$$

где  $x, v_x, t$  и  $x', v'_x, t'$  связаны следующими соотношениями:

$$\frac{mv_x^2}{2} + e\varphi(x) = \frac{mv_x'^2}{2} + e\varphi(x'), \quad (19)$$

$$t - t' = \int_{x'}^x \frac{d\xi}{\sqrt{v_x^2 + (2e/m)(\varphi(x) - \varphi(\xi))}}. \quad (20)$$

Переходя от интегрирования по времени к координате  $dt' = dx' / \sqrt{v_x^2 + (2e/m)(\varphi(x) - \varphi(x'))}$  и используя модельный интеграл столкновений (15), получим в стационарном случае

$$f_{yx}(x, v_x) = \int \left( I_i(x') + \frac{f_s(x')}{\tau} \right) \frac{f_x \left[ \sqrt{v_x^2 + (2e/m)(\varphi(x) - \varphi(x'))} \right]}{\sqrt{v_x^2 + (2e/m)(\varphi(x) - \varphi(x'))}} dx'. \quad (21)$$

Интеграл берется в пределах от  $-R$  до  $x$  при  $v_x > \sqrt{(2e/m)(\varphi(R) - \varphi(x))}$  и от  $x$  до  $R$  при  $v_x < -\sqrt{(2e/m)(\varphi(R) - \varphi(x))}$ ,  $f_{yx}(x, v_x) = 0$  при остальных  $v_x$ .

Если потенциал  $\varphi(x)$  заранее неизвестен, а подлежит определению, то необходимо совместное решение уравнений (12), (13), (21) с уравнениями Пуассона или квазинейтральности и электронного баланса. В этом случае удобнее преобразовать (12), (13) так, чтобы получить связь между  $f_s(x)$  и  $\varphi(x)$ . Используя (12), выразим  $f(a)$  через  $f_s(x)$ . При  $x > 0$  перепишем (12) в виде

$$f_s(x) = 2 \int_x^R \frac{f(a) da}{T(a) \sqrt{(2e/m)(\varphi(a) - \varphi(x))}}. \quad (22)$$

Домножая обе части (22) на  $(d\varphi/dx) / \sqrt{\varphi(x) - \varphi(y)}$  и интегрируя по  $dx$  в пределах от  $y$  до  $R$ , получим

$$\begin{aligned} \int_y^R \frac{f_s(x) \frac{d\varphi}{dx} dx}{\sqrt{\varphi(x) - \varphi(y)}} &= \sqrt{\frac{2m}{e}} \int_y^R \frac{\frac{d\varphi}{dx} dx}{\sqrt{\varphi(x) - \varphi(y)}} \int_x^R \frac{f(a) da}{T(a) \sqrt{\varphi(a) - \varphi(x)}} = \\ &= \sqrt{\frac{2m}{e}} \int_y^R \frac{f(a) da}{T(a)} \int_y^a \frac{\frac{d\varphi}{dx} dx}{\sqrt{(\varphi(a) - \varphi(x))(\varphi(x) - \varphi(y))}} = \pi \sqrt{\frac{2m}{e}} \int_y^R \frac{f(a) da}{T(a)}. \end{aligned}$$

Дифференцируя по  $y$  и меняя обозначения, получим

$$f(a) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{e}{2m}} T(a) \frac{d}{da} \left( \int_a^R \frac{f_s(x) \frac{d\varphi}{dx} dx}{\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}} \right). \quad (23)$$

С помощью (12) и (23) преобразуем уравнение баланса (13) к виду

$$-\frac{f_s(x)}{\tau} + 4 \int_{|x|}^R W_1(a, x) da \int_0^a W_2(a, x') \left( I_i(x') + \frac{f_s(x')}{\tau} \right) dx' = 0. \quad (24)$$

При пренебрежении уходом и образованием частиц (для чего  $R \rightarrow \infty$ ,  $I_i(x') \rightarrow 0$ ) решением (24) является бoльцмановская функция  $f_s(x) = f_0 \exp \times [-e\varphi(x)/kT_r]$ , использованная в [5]. Для определения константы  $f_0$  необходимо учесть баланс образующихся и уходящих частиц. В [5] скорость ухода ионов принята равной равновесной концентрации ионов на краю пучка, умноженной на тепловую скорость, таким образом,

$$f_0 \exp \left( -\frac{e\varphi(R)}{kT_r} \right) \sqrt{\frac{kT_r}{2\pi m}} = \int_0^R I_i(x) dx. \quad (25)$$

Такая оценка для скорости ухода представляется завышенной, поскольку, как правило, концентрация частиц вблизи границы уменьшается по сравнению с равновесной вследствие краевых эффектов (подробный анализ которых выходит за рамки статьи и может стать предметом для дальнейшей работы), но даже при таком допущении модель [5] дает завышенные значения ионной плотности, что связано с неучетом ухода частиц в продольном направлении в том случае, если продольное распределение потенциала монотонно [3], т. е. не содержит локальных ловушек для ионов.

При выполнении некоторых условий, рассматриваемых ниже, предложенный подход можно использовать и при анализе продольного движения ионов. Пусть  $\varphi(x, z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(x)$ , где  $\varphi_0(z)$  — монотонная функция. Если расстояние  $l_T$ , проходимое частицей вдоль оси  $z$  за время, равное периоду поперечных колебаний, отвечает условию  $l_T \ll L$ , где  $L$  — длина рассматриваемой области в продольном направлении, то от функции распределения захваченных частиц  $f_2(z, v_z, x, v_x)$  можно перейти, как это рассматривалось выше, к функции  $f(z, v_z, a)$ . Такой подход в определенном смысле, аналогичен диффузионному приближению (применяемому при анализе процессов, характерный пространственный масштаб которых существенно превышает длину свободного пробега, а временной — характерное время между столкновениями) и может быть применен для анализа процессов, характерный продольный масштаб которых существенно превышает величину  $l_T$ , а временной — среднее значение периода колебаний. Для рассматриваемой задачи ухода частиц в продольном направлении существенные изменения концентрации частиц и продольного электрического поля происходят обычно на длине  $l_z \sim L$  и можно провести следующие оценки для условий применимости предлагаемого подхода. Пусть  $\varphi_z$  — продольное изменение потенциала,  $T$  — период поперечных колебаний ( $T \sim R/\bar{v}_x \sim \sim R/\sqrt{e\varphi_R/m}$ ), следовательно, должно выполняться  $l_T \sim \bar{v}_z T \sim \sqrt{e\varphi_z/m} \times \times R/\sqrt{e\varphi_R/m} \ll L$ . Таким образом, глубина потенциальной ямы должна отвечать условию

$$\sqrt{\varphi_R} \geq \frac{R}{L} \sqrt{\varphi_z}. \quad (26)$$

Если продольное поле существенно меняется на длине  $l_z$ , меньшей, чем  $L$ , то в (27) вместо  $L$  надо подставить  $l_z$ . Кроме того, если продольное электрическое поле мало и характерная скорость иона  $\bar{v}_z \sim \sqrt{kT_x/m}$ , то в (26)  $\varphi_z$  следует заменить на  $kT_x/e$ . Предложенный подход применим, вообще говоря, при различных соотношениях между величинами  $L$  и  $\lambda_i$ , т. е. его можно использовать не только при анализе ионного распределения в области дрейфа электронного пучка, когда  $L \ll \lambda_i$ , поскольку сечения рассеяния электронов и ионов являются величинами одного порядка, но и при выполнении обратного условия  $L \gg \lambda_i$ , что часто реализуется в газовых разрядах. В этом случае, очевидно, необходим учет влияния столкновений на распределение частиц. Обязательным является лишь выполнение условия низкого давления (4) для поперечного движения. Следует заметить, что при некоторых условиях учет столкновений будет необходим даже в случае  $\lambda_i \gg L$ , так как при большой глубине потенциальной ямы частица за счет поперечных колебаний может пройти путь, сравнимый с длиной свободного пробега. Оценим глубину потенциальной ямы в этом случае. Характерное время ухода частицы в продольном направлении  $\tau_z \sim L/\bar{v}_z$ , число поперечных колебаний за это время  $\sim \tau_z/T$ , и если путь

$$l \sim \frac{\tau_z}{T} R \sim \frac{L}{\sqrt{e\varphi_z/m}} \frac{\sqrt{e\varphi_R/m}}{R} R$$

составляет величину больше или порядка  $\lambda_i$ , то вероятностью столкновений уже нельзя пренебречь даже при формальном выполнении условий кнудсеновского режима  $\lambda_i \gg L, R$ . Для глубины потенциальной ямы в этом случае получаем

$$\sqrt{\varphi_R} \geq \frac{\lambda_i}{L} \sqrt{\varphi_z}, \quad (27)$$

либо в случае  $e\varphi_z \ll kT_x$

$$\sqrt{\varphi_R} \geq \frac{\lambda_i}{L} \sqrt{\frac{kT_x}{e}}. \quad (27')$$

При движении против продольного электрического поля ( $v_x < 0$ , если  $F_x = -(d\varphi_0/dz) > 0$ ) частица будет иметь скорость  $v_x$  при прохождении точки  $z$ , если она имела после ионизации или последнего столкновения в точке  $z' > z$  скорость

$$v'_x = -\sqrt{v_x^2 + \frac{2e}{m}(\varphi_0(z) - \varphi_0(z'))} \equiv -v'(z') \quad (28)$$

и прошла путь от  $z'$  до  $z$  без столкновений. При движении по полю ( $v_x > 0$ ) скорость  $v_x$  в точке  $z$  могут иметь как частицы, получившие в момент образования в точке  $z'$  положительную компоненту  $v'_x = v'(z')$ , так и частицы, имевшие скорость  $v'_x = -v'(z')$ , но затормозившиеся в электрическом поле и набравшие скорость  $v_x$  при обратном движении от точки поворота  $\bar{z}$  до  $z$ . Для  $\bar{z}$  получаем соотношение

$$\frac{mv_x^2}{2} + e\varphi_0(z) = e\varphi_0(\bar{z}). \quad (29)$$

Если (29) не имеет решений в промежутке  $[0; L]$ , то, очевидно, частица, имевшая в  $z'$  скорость  $v'_x = -v'(z')$ , пересекает границу  $z=0$  и выбывает из рассмотрения. Поэтому обладать в точке  $z$  скоростью  $v_x > 0$ , удовлетворяющей условию  $mv_x^2/2 > e\varphi_0(0) - e\varphi_0(z)$ , будут лишь частицы, имевшие в точке  $z'$  положительную компоненту  $v'_x$ . Принимая распределение по скоростям образующихся после ионизации или последнего столкновения частиц максвелловским, запишем распределение образующихся в единицу времени в точке  $z$  частиц по амплитудам и продольным скоростям в виде

$$I_0(z, v_x, a) = \left( \int_{-a}^a W_2(a, x) \nu f_s(z, x) dx + \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} W(a, a') \nu(v_x, a') f(z, v_x, a') dv_x da' \right) f_x(v_x), \quad (30)$$

где  $\nu(z_x, a)$  — частота столкновений частицы, имеющей скорость  $v_x$  и амплитуду  $a$ , усредненная по периоду колебаний.

Таким образом, интегральное уравнение для  $f(z, v_x, a)$  принимает следующий вид:

$$f(z, v_x, a) = \begin{cases} \int_z^L I_0(z', -v'(z'), a) \exp \left[ - \int_z^{z'} \nu(v'(\xi), a) \frac{d\xi}{v'(\xi)} \right] \frac{dz'}{v'(z')} \\ \text{при } v_x < 0, \\ \int_z^L I_0(z', -v'(z'), a) \exp \left[ - \int_z^{z'} \nu(v'(\xi), a) \frac{d\xi}{v'(\xi)} - \right. \\ \left. - \int_z^{z'} \nu(v'(\xi), a) \frac{d\xi}{v'(\xi)} \right] \frac{dz'}{v'(z')} + \int_z^L I_0(z', v'(z'), a) \times \\ \times \exp \left[ - \int_{z'}^z \nu(v'(\xi), a) \frac{d\xi}{v'(\xi)} \right] \frac{dz'}{v'(z')} \\ \text{при } 0 < v_x < \sqrt{\frac{2e}{m}(\varphi_0(0) - \varphi_0(z))}, \\ \int_0^z I_0(z', v'(z'), a) \exp \left[ - \int_{z'}^z \nu(v'(\xi), a) \frac{d\xi}{v'(\xi)} \right] \frac{dz'}{v'(z')} \\ \text{при } v_x > \sqrt{\frac{2e}{m}(\varphi_0(0) - \varphi_0(z))}. \end{cases} \quad (31)$$

Рассмотрим возможные упрощения интегрального уравнения в различных предельных случаях. Если частота ухода частиц как в продольном, так и поперечном направлениях много меньше характерной частоты столкновений (что выполняется при  $L \gg \lambda_i$ ,  $\varphi_R \gg kT_r/e$ ), то можно принять, как предложено в [5], поперечное распределение бoльцмановским

$$f_s(x, z) = f_0(z) \exp\left(-\frac{e\varphi_1(x)}{kT_r}\right).$$

Усредняя поперечное распределение, введем функцию

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{R} \int_0^R f_0(z) \exp\left(-\frac{e\varphi_1(x)}{kT_r}\right) dx. \quad (32)$$

При выполнении условия  $eF_z \lambda_i \ll kT_r$  функцию  $\overline{f(z)}$  можно найти, используя диффузионное приближение,

$$\frac{d}{dz} \left( -D \frac{d\overline{f(z)}}{dz} + \mu F_z \overline{f(z)} \right) = \frac{1}{R} \int_0^R v_i f_s(x, z) dx - \frac{\overline{f(z)} \exp\left(-\frac{e\varphi_1(R)}{kT_r}\right) \sqrt{\frac{kT_r}{2\pi m}}}{\int_0^R \exp\left(-\frac{e\varphi_1(x)}{kT_r}\right) dx}, \quad (33)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии,  $\mu$  — подвижность ионов. Первый член в правой части (33) представляет собой усредненную по  $x$  частоту образования ионов в результате ионизации, а второй учитывает возможный уход ионов в поперечном направлении способом, предложенным в [5], поскольку

$$\overline{f(z)} \left( \int_0^R \exp\left(-\frac{e\varphi_1(x)}{kT_r}\right) dx \right) = f_0(z)/R.$$

Если  $eF_z \lambda_i \gg kT_r$ , то можно пренебречь тепловым разбросом продольных скоростей ( $I_0(z, v_z, a) = I_0(z, a) f_m(v_z) \rightarrow I_0(z, a) \delta(v_z)$ ), (31) принимает вид

$$f(z, v_z, a) = \begin{cases} \frac{I_0(z, a)}{v_z} \exp\left[-\int_z^z v(v'(\xi), a) \frac{d\xi}{v'(\xi)}\right] & \text{при } v_z \geq 0, \\ 0 & \text{при } v_z < 0, \end{cases} \quad (34)$$

где  $\xi$  — корень уравнения (29).

Аналогичное упрощение можно провести для поперечного распределения, но следует заметить, что замена  $f_m(v_z) \rightarrow \delta(v_z)$  может привести к существенным ошибкам в расчете  $f(a)$  при малых  $a$ , так как для частицы, образовавшейся вблизи оси, потенциальная энергия мала и может быть меньше или порядка тепловой, в частности, если  $f(0) \neq 0$ , то  $f_s(x=0) \rightarrow \infty$ , поскольку  $(d\varphi/da)|_{a=0} = 0$  (см. (11)). Учет теплового движения также необходим вблизи края потенциальной ямы.

Если  $L \ll \lambda_i$  и  $\sqrt{\varphi_R} \ll \sqrt{\varphi_x} (\lambda_i/L)$ , то столкновениями можно пренебречь, и тогда (34) преобразуется к виду

$$f(z, v_z, a) = \frac{1}{v_z} \int_{-a}^a W_2(a, x) v_i f_s(z, x) dx \quad \text{при } v_z \geq 0. \quad (35)$$

В этом случае средняя плотность  $\overline{\rho(z)} = (1/R) \int_0^R \rho(z, x) dx$  будет описываться уравнением (1), предложенным в [4], но поперечные колебания приве-



дут к увеличению плотности ионного заряда вблизи оси системы, что многократно наблюдалось экспериментально [3].

Предложенный подход можно применить и в случае, когда  $\varphi(x, z) \neq \varphi_0(z) + \varphi_1(x)$ , но в такой ситуации энергия и амплитуда поперечных колебаний не являются интегралами движения и удобней перейти, как предложено в [6], от  $f_2(x, v_x)$  не к  $f(a)$ , а к  $f(I)$ , где  $I$  — переменная действия ( $I = E / (2\pi\nu_{\text{гои}})$ ).

Таким образом, в настоящей работе изложен метод расчета ионных распределений в потенциальной яме, основанный на раздельном рассмотрении уходящих и захваченных частиц, причем расчет функции распределения захваченных частиц проведен на основе последовательного рассмотрения релаксации частиц по энергии и свободных колебаний. Получено интегральное уравнение, учитывающее возможный уход захваченных частиц в продольном направлении, и рассмотрены возможности его упрощения в различных предельных случаях.

### Список литературы

- [1] Габович М. Д., Плешивцев Н. В., Семашко Н. Н. Пучки ионов и атомов для управляемого термоядерного синтеза и технологических целей. М.: Энергоатомиздат. 1986. 248 с.
- [2] Крейндель Ю. Е. Плазменные источники электронов. М.: Атомиздат, 1977. 144 с.
- [3] Алямовский И. В. Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. радио, 1966. 456 с.
- [4] Field L. M., Spangenberg K., Helm R. // *El. Commun.* 1947. Vol. 24. N 1. P. 108—121.
- [5] Linder E. G., Hernqvist K. G. // *J. Appl. Phys.* 1950. Vol. 21. N 11. P. 1088.
- [6] Будкер Г. И., Беляев С. Г. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 330—354.
- [7] Bhatnagar R. L., Gross E. P., Krook M. // *Phys. Rev.* 1954. Vol. 94. N 3. P. 511—525.

Институт электрофизики АН СССР  
Уральское отделение  
Свердловск

Поступило в Редакцию  
14 ноября 1988 г.

В окончательной редакции  
28 апреля 1989 г.