01

О ПОТЕНЦИАЛЕ ОБРАЗОВАНИЯ КОНУСНОГО МЕНИСКА ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

С. И. Шевченко

Рассмотрена задача определения потенциала образования конусного мениска проводящей жидкости в сильном электрическом поле. В статическом приближении для проводящей жидкости получены теоретические значения потенциала формирования конусного мениска, значительно лучше согласующиеся с экспериментом, чем известная формула Тэйлора.

Электрогидродинамическое распыление проводящей жидкости, приводящее к образованию мелких заряженных частиц, начинается с формирования на торце капилляра конусообразного мениска. На приведенных в работах [1, 2] рисунках видно, что мениск с очень высокой точностью принимает форму конуса.

Важную задачу определения параметров, соответствующих образованию конуса, впервые попробовал решить Тэйлор [3]. Он применил метод нахождения необходимых условий, считая, что на поверхности проводящей жидкости сформирован мениск, имеющий вид идеального конуса, находил условия (потенциал и угол раствора конуса), при которых на поверхности конуса выполняется условие баланса сил,

$$p+\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_n^2=\gamma K, \tag{1}$$

где p — скачок давления на границе жидкость—атмосфера, $\varepsilon_0=8.85\cdot10^{-12}$ Ф/м, E_n — нормальная к поверхности жидкости составляющая напряженности электрического поля, γ — коэффициент поверхностного натяжения, K — кривизна поверхности в данной точке.

Тэйлор заменил капилляр с жидким конусом на торце бесконечным конусом и, отбросив в уравнении (1) давление p, вывел выражение для потенциала в системе

$$\varphi=\varphi_0+Ar^{1/2}P_{1/2}(\cos\theta), \tag{2}$$

из условия эквипотенциальности поверхности мениска ($P_{1/2}(\cos\theta)=0$) получил угол полураствора конуса

$$\eta=180°-130.7°=49.3° \tag{3}$$

и вывел формулу для определения потенциала формирования конусного мениска

$$U_0^T=1.432\cdot10^3\sqrt{\gamma R_0}, \tag{4}$$

в которую γ и R_0 подставляются в системе единиц CGS. В этих формулах φ_0 — потенциал поверхности жидкости; $P_{1/2}(\cos\theta)$ — функция Лежандра первого рода; θ — угол, отсчитываемый от оси системы; r — радиальная координата в сферической системе координат; R_0 — расстояние от вершины конуса до антиэлектрода.

Недостатком работы [3] явилось то, что конус предполагался бесконечным, поэтому в формулу (4) не вошла зависимость от радиуса капилляра, однако вошло расстояние капилляр—антиэлектрод R_0. Экспериментальные работы показали, что зависимость от радиуса капилляра существует [4]. Что касается зависимости от расстояния R_0, то в некоторых работах использовалась геометрия, в которой вместо плоского антиэлектрода применялось металлическое кольцо, и капилляр мог ставиться своим кончиком как раз в плоскости кольца и даже выдвигаться вперед [5]. Ясно, что в этом случае формула (4) совсем неприменима.

Еще одним недостатком работы [3] явилось то, что давление p было в ней отброшено без всякого обоснования.

Все это явилось поводом к тому, чтобы еще раз вернуться к проблеме нахождения потенциала образования конуса Тэйлора. В данной работе приведена попытка более точной постановки задачи определения потенциала образования конусного мениска в системе капилляр с конусом на торце и антиэлектрод—плоскость и выведены условия, при которых на поверхности мениска конусной формы удовлетворяется уравнение (1).

Будем считать, что мениск имеет конусную форму. Попробуем найти условия, при которых на поверхности этого конуса выполняется условие баланса сил, т. е. равенство (1). Эту задачу можно разделить на две: задачу определения электрического поля и нахождения упомянутых выше условий.

Аналитическое нахождение потенциала электрического поля в системе капилляр с конусом на торце—плоскость невозможно. Видоизменим задачу: рассмотрим систему капилляр с жидким конусом произвольного угла полураствора на торце и плоский антиэлектрод. Вырежем из всего пространства сферу с центром на вершине конуса и радиусом $R_1=L$, где L — длина образующей конуса, и будем считать, что на доле поверхности этой сферы, находящейся вне конуса, задано некоторое распределение потенциала U_1 (cos θ). Для нахождения потенциала внутри сферы с вырезанным конусом имеем уравнение Лапласа с граничными условиями

$$\Delta\varphi=0,\ \varphi(\theta=\theta_0)=U_0,\ \varphi(\theta=0)=\text{огр.},\ \varphi(r\to 0)=\text{огр.},\ \varphi(r=R_1)=U_1(x), \quad (5)$$

где $x=\cos\theta$.

Применив метод Фурье к решению этого уравнения [6], получим

$$\varphi=U_0\left[1+\sum_{\nu}c_\nu P_\nu(x)\left(\frac{r}{R_1}\right)^\nu\right], \quad (6)$$

$$c_\nu=\frac{\int\limits_{x_0}^{1}\left(\frac{U_1(x)}{U_0}-1\right)P_\nu(x)\,dx}{\int\limits_{x_0}^{1}[P_\nu(x)]^2\,dx}, \quad (7)$$

где индекс ν удовлетворяет уравнению $P_\nu(x_0)=0$, $x_0=\cos\theta_0$, θ_0 — угол «внешнего» полураствора конуса.

Из (6) найдем составляющую напряженности электрического поля, нормальную к поверхности конуса,

$$E_n=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_{x=x_0}$$

и подставим ее в уравнение баланса сил на поверхности (1)

$$p+\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{3}{2}\frac{U_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\sum_{\nu}c_\nu P_{\nu+1}(x_0)\frac{r^{\nu-1}}{R_1^\nu}\right]^2=\gamma\frac{|x_0|}{r\sqrt{1-x_0^2}}. \quad (8)$$

Это уравнение должно выполняться при любых значениях r, а это возможно только, если $\nu=1/2$ и в левой части можно пренебречь давлением p и всеми слагаемыми в квадратных скобках с $\nu\neq 1/2$. Ясно, что в сумме в квадратных скобках можно оставить только первый член с $\nu=1/2$, или при выполнении условия $r \ll R_1$, или если все c_ν $(\nu \neq 1/2) = 0$. Последнее условие может выполняться только для системы электродов, в которой антиэлектрод имеет форму, задаваемую уравнением $r = R_0/[P_{1/2}(\cos\theta)]^2$ [3]. Ясно, что для реально применяемой геометрии, когда антиэлектрод имеет вид плоскости, это предположение не выполняется и все c_ν $(\nu \neq 1/2) \neq 0$. Оценка давления p проведена в [7], где показано, что в уравнении (1) им действительно можно пренебречь для $r > 50$ Å.

Если подставить $\nu = 1/2$ в граничное условие $\varphi\,(\theta = \theta_0) = U_0$, то получим условие существования тэйлоровского конуса

$$P_{1/2}(\cos\theta_0) = 0. \tag{9}$$

Это уравнение относительно угла θ_0 и его решение дает угол, дополняющий угол полураствора тэйлоровского конуса до 180° [3]: $\theta_0 = 130.7°$.

Вернемся снова к равенству (8), в котором остались только два члена

$$\frac{3}{2}\frac{P_{\nu+1}(x_0)\,U_0\,c_\nu}{\sqrt{R_1(1-x_0^2)}}\,r^{\nu-1} = \sqrt{\frac{2\gamma\,|x_0|}{\varepsilon_0\sqrt{1-x_0^2}}}\,r^{1/2}. \tag{10}$$

Для выполнения этого равенства необходимо не только, чтобы справа и слева стояли одинаковые степени r, а также чтобы коэффициенты при r были одинаковы. Из последнего требования можно получить величину потенциала U_0, при которой реализуется мениск в виде конуса Тэйлора,

$$U_0 = \frac{2}{3P_{3/2}(x_0)\,c_{1/2}}\sqrt{\frac{2\gamma\,|x_0|\,a}{\varepsilon_0}} \approx 5.198\cdot 10^5\,\frac{\sqrt{\gamma a}}{c_{1/2}}, \tag{11}$$

где a — радиус капилляра.

В этой формуле единственной неопределенной величиной является коэффициент $c_{1/2}$. Для его вычисления используем выражение (7), в которое достаточно подставить отношение $U_1(x)/U_0$. Так как вследствие линейности задачи нахождения поля в заданной геометрии отношение $U_1(x)/U_0$ не зависит от потенциала на капилляре U_0, то для определения $c_{1/2}$ достаточно каким-либо способом узнать распределение $U_1(x)$ при любом U_0, например для удобства можно взять $U_0 = 1B$.

Заметим, что при постановке задачи (5) не все особенности геометрии еще были известны (в частности, не был известен угол полураствора конуса η). Теперь когда мы убедились, что конус представляет собой тэйлоровский конус с углом полураствора $\eta = 180° - \theta_0$, геометрия определена полностью. В этой ситуации распределение потенциала на части поверхности сферы $U_1(x)$ можно найти численно. Отметим, что точность метода выделения из всего пространства некоторого объема, оказывающего наибольшее влияние на исследуемый эффект (так называемый метод «окна»), определяется точностью собственно счета во внутренней области и точностью задания граничного условия, которая опять же определяется точностью счета, но во всем пространстве. Относительная погрешность определения напряженности электрического поля, которая вычисляется аналитически, пропорциональна относительной погрешности задания граничного условия $U_1(x)$, которая определяется точностью численного счета. В данной работе определение величины $U_1(x)$ осуществлялось программой «Poisson-2» системы «Топаз» [8], для которой тестовые вычисления показали, что для геометрии, подобной применяемой нами, расчет напряженности электрического поля осуществляется с точностью не хуже 0.02 %. И относительная погрешность расчета напряженности электрического поля на поверхности конуса (имеется в виду полный аналитический ряд) имеет такой же порядок.

Результаты расчета коэффициента $c_{1/2}$, а также коэффициента $B = 5.198 \times 10^5\sqrt{a}/c_{1/2}$ для различных значений радиуса капилляра представлены в табл. 1. Отметим, что значения коэффициента $c_{1/2}$ слабо зависят от радиуса.

Подставляя коэффициент B в формулу (11), получим искомую формулу для потенциала, при котором на конусном мениске выполняется уравнение (1),

$$U_0 = B\sqrt{\gamma}. \tag{12}$$

Отметим, что в формуле (11) такая же зависимость потенциала от коэффициента поверхностного натяжения γ, как и в формуле Тэйлора (4). Однако существуют и отличия. В формуле (11) есть зависимость U_0 от радиуса капилляра (она заключена в $\sqrt{a}/c_{1/2}$), а формула Тэйлора (4) не содержит зависимости от него. В то же время формула Тэйлора содержит зависимость U_0 от расстояния капилляр—антиэлектрод R_0, а в формуле (11) зависимость от R_0 содержится в $c_{1/2}$. Заметим, что для условий работы [9] (см. первую строчку табл. 2) при изменении R_0 с $2 \cdot 10^{-2}$ до $3 \cdot 10^{-2}$ м вычисленные по формуле (12) значения потенциала U_0 меняются с 4.05 до 4.08 кВ. Это вполне объяснимо, так как, согласно [10], решение уравнения Лапласа вблизи неоднородности границы определяется в основном масштабом этой неоднородности. Поэтому потенциал U_0 должен заметно зависеть от R_0, только когда R_0 станет сравнимым с радиусом капилляра.

Таблица 1

Значения коэффициентов $c_{1/2}$ и B для различных значений радиуса капилляра и для $R_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ м

$a \cdot 10^{-6}$ м	$c_{1/2}$	$B \cdot 10^{-3}$
100	0.460	11.28
200	0.491	14.96
300	0.511	17.59
400	0.528	19.68
500	0.541	21.47

Сравнение получаемого с помощью (12) потенциала U_0 с экспериментальными результатами и с потенциалом, получаемым по формуле Тэйлора (4), представлено в табл. 2. Из нее видно, что теоретические результаты (формула (12)) вполне удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов и как качественно (т. е. в зависимости от параметров a, γ), так и количественно значительно лучше соответствуют экспериментальным результатам, чем формула Тэйлора (4).

Таблица 2

Сравнение теоретических значений потенциала U_0, полученных с помощью формулы (12), с экспериментальными результатами $U_0^э$ и результатами по Тэйлору U_0^T [8]

Литературный источник	Жидкость	γ, Н/м	R_0, м	a, м	$U_0^э$, кВ	U_0^T, кВ	U_0, кВ
[9]	Водопроводная вода	$7.2 \cdot 10^{-2}$	$2—3 \cdot 10^{-2}$	$2.05 \cdot 10^{-4}$ $2.55 \cdot 10^{-4}$	4.7	17.3—21	4.05—4.08 4.42—4.48
[11]	Водные растворы	$7.2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	4.3	17.3	4.01
[12]	Дибутилфталат	$3.456 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$	3	11.8	2.1

Список литературы

[1] *Swatic D. S., Hendricks C. D.* // AIAA J. 1968. Vol. 6. N 8. P. 1596—1597.
[2] *Kingham D. R., Bell A. E.* // Appl. Phys. 1985. Vol. A36. P. 67—70.
[3] *Taylor J.* // Proc. Roy. Soc. (London). 1964. Vol. A280. P. 383—397.
[4] *Sample S. B., Bollini R.* // J. Coll. Interf. Sci. 1972. Vol. 4. N 2. P. 185—193.
[5] *Mahoney J. F.* et al. // J. Appl. Phys. 1969. Vol. 50. N 13. P. 5101—5106.
[6] *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 727 с.
[7] *Kingham D. R., Swanson L. W.* // Appl. Phys. 1984. Vol. A 34. N 2. P. 123—132.
[8] *Иванов В. Я.* Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Новосибирск, 1958. Ч. 1. 193 с.
[9] *Raghupathy B., Sample S. B.* // Rev. Sci. Instr. 1970. Vol. 41. N 5. P. 645—647.
[10] *Лаврентьев И. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 257 с.
[11] *Краснов Н. В., Тихонов А. А., Шкуров В. А.* // Тр. Всесоюз. конф. по масс-спектрометрии. Сумы, 1986. Т. 5. С. 102.
[12] *Коженков В. И.* и др. // ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 4. С. 879—880.

Научно-техническое объединение
Институт аналитического приборостроения
АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
25 сентября 1987 г.
В окончательной редакции
29 марта 1988 г.