

# Двумерные нелинейные электромагнитные волны в массиве углеродных нанотрубок

© М.Б. Белоненко\*, С.Ю. Глазов\*\*, Н.Г. Лебедев, Н.Е. Мещерякова\*

Волгоградский государственный университет,  
Волгоград, Россия

\* Лаборатория нанотехнологий Волгоградского института бизнеса,  
Волгоград, Россия

\*\* Волгоградский государственный педагогический университет,  
Волгоград, Россия

E-mail: nikolay.lebedev@volsu.ru, mbelonenko@yandex.ru

(Поступила в Редакцию 21 августа 2008 г.)

Теоретически исследуется взаимодействие электромагнитных волн с углеродными нанотрубками. На основе связанных уравнений для классической функции распределения электронов в углеродных нанотрубках типа zig-zag и уравнений Максвелла для электромагнитного поля рассматривается динамика нелинейных электромагнитных волн. Получено эффективное уравнение, описывающее динамику электромагнитного поля, приведены данные численных расчетов, свидетельствующие о существовании устойчивых нелинейных электромагнитных волн. Исследовано влияние постоянного электрического поля на распространение волн.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-02-00663).

PACS: 71.27.+a, 78.66.Tr, 78.67.Ch, 78.70.Gq

## 1. Введение

Современные тенденции развития оптики, связанные с созданием мощных лазеров, привели к существенному прогрессу в изучении традиционных с точки зрения практики веществ [1–3]. В первую очередь это связано с общей для всей современной физики парадигмой изучения нелинейных динамических процессов [4–6]. Применение мощных лазеров и уникальная точность оптических измерений позволили существенно продвинуться и в экспериментальном аспекте изучения нелинейных явлений. Отметим также тесную связь собственно оптических явлений и явлений, известных в других физических областях. Это и теория сверхизлучения, которое может быть описано как неравновесный фазовый переход [7], и теория самоиндуцированной прозрачности, которая тесно связана с теорией солитонов в конденсированных средах [8,9], и теория генерации в многомодовых лазерах, положившая начало синергетике [10]. Уже простое перечисление проблем, общих для современной физики нелинейных явлений и оптики, дает полное понимание того факта, что изучение нелинейных динамических процессов, индуцированных в веществе мощным лазерным импульсом, является весьма актуальным.

Исходя из изложенного выше в качестве объекта исследования должно быть выбрано вещество с ярко выраженными нелинейными свойствами; с другой стороны, это должно быть вещество, важное с точки зрения практических приложений. Углеродные нанотрубки (УНТ) являются уникальными макромолекулярными системами [11]. УНТ близки по своей структуре к идеальным одномерным системам, что делает их при-

влекательными для использования в области нано- и микроэлектроники.

Описанные выше свойства ЕНТ стимулировали их широкое излучение в рамках нелинейной оптики. Одним из перспективных направлений в этой области является изучение процесса распространения ультракоротких импульсов света (оптических солитонов) в УНТ [12–18]. Хотя возможность существования электромагнитных солитонов и зависимость их характеристик от параметров УНТ была предсказана в цитированных работах, остался ряд вопросов, требующих дальнейшего уточнения. Отметим, в частности, что в случае ультракоротких оптических импульсов необходимо использовать другое кинетическое уравнение, чем в [12–18], поскольку длительность импульса оказывается существенно меньше характерного времени релаксации. Также очевидно, что разработка последовательного квантовомеханического описания, основанного на гамильтониане электронов УНТ, представляет и самостоятельный интерес.

Как известно из литературы [19], одной из основных целей современной оптики является создание полностью оптических приборов, в которых с помощью света можно управлять светом. В последнее время активно исследуются оптические эффекты, связанные с взаимодействием электромагнитных солитонов. Этот интерес стимулируется как успешными экспериментами, в которых получены многомерные оптические солитоны (устойчивые локализованные световые структуры), так и появлением новых материалов. Все перечисленные выше факты и обстоятельства делают проблему исследования нелинейных динамических процессов в УНТ актуальной как для теории, так и для практики.

## 2. Модель и основные уравнения

При построении модели растространения ультракороткого оптического импульса в двумерном массиве УНТ считаем, что вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(x, t)$  направлен вдоль оси трубки, а электромагнитная волна движется в поперечном направлении (рис. 1). Для простоты и определенности УНТ считаются идеальными, имеющими зигзагообразную модификацию и расположенными на одинаковых расстояниях друг от друга, равных  $0.34 \text{ nm}$  [11]. Поскольку не учитывается взаимодействие между УНТ, способ упаковки в массив также не важен. Поэтому, предполагалась тетрагональная упаковка однослойных УНТ двумерный массив с пространственной группой  $P4_2/mmc(D_{4h}^9)$  [11].

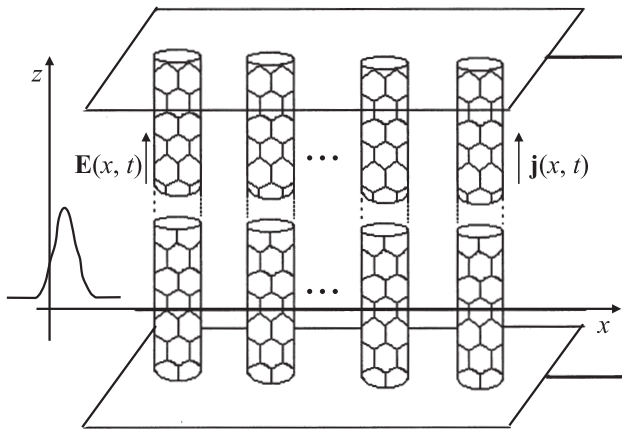
Необходимо отметить, что за пределами рассмотрения настоящей работы остается круг вопросов, связанных с наличием подложки, на которой выращиваются нанотрубки. Так, в частности, наличие подложки может привести к появлению в данной системе аналогов поверхностных волн, рассмотрение которых выходит за рамки этой публикации. В работе также не рассматриваются эффекты, связанные с накоплением в подложке заряда, появлением дополнительного электрического поля, направленного вдоль оси нанотрубки.

Электронное строение УНТ типа zig-zag, характеризующейся хиральными индексами  $(n, 0)$ , описывается хорошо известными дисперсионными соотношениями, полученными в рамках хюккелевского  $\pi$ -электронного приближения [11],

$$E(\mathbf{p}) = \pm \gamma \sqrt{1 + 4 \cos(ap_z) \cos\left(\frac{\pi s}{n}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi s}{n}\right)}, \quad (1)$$

где  $\gamma \approx 2.5 \text{ eV}$ ,  $a = 3b/2\hbar$ ,  $b = 0.142 \text{ nm}$  — расстояние между соседними атомами углерода, квазиимпульс  $\mathbf{p}$  задается как  $(p_s, s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ . Разные знаки относятся к зоне проводимости и валентной зоне.

Кратко изложим методику исследования, подробно представленную в работах [12–18] для одномерного



**Рис. 1.** Геометрия задачи. Для простоты изображен один ряд двумерного массива УНТ.

случая. Электромагнитное поле импульса описывается классически на основании уравнений Максвелла. С учетом диэлектрических и магнитных свойств УНТ [19] и двумерности задачи уравнения Максвелла для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  в калибровке  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  будут иметь известный вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) пренебрегается дифракционным расщеплением лазерного пучка в направлениях, перпендикулярных оси распространения. Вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  выбирается в виде  $\mathbf{A} = (0, 0, A_z(x, y, t))$ .

Для определения тока воспользуемся полуклассическим приближением [20]. Эволюция ансамбля Ферми-частиц описывается классическим кинетическим уравнением Больцмана в приближении времен релаксации [21]

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{q}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial p_z} = \frac{F_0 - f}{\tau}. \quad (3)$$

Здесь функция распределения  $f = f(p_z, s, t)$  неявно зависит от пространственных координат  $x$  и  $y$  в силу зависимости от них компоненты вектор-потенциала,  $F_0$  — равновесная функция распределения Ферми

$$F_0 = \frac{1}{1 + \exp(E(\mathbf{p})/k_b T)}, \quad (4)$$

$T$  — абсолютная температура,  $k_b$  — постоянная Больцмана. Время релаксации  $\tau$  можно оценить согласно [22] как  $\sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ .

Решение уравнения (3) для функции распределения находится методом характеристик [23] и имеет вид

$$f = F_0 \left( p_z + \frac{q}{c} A_z(t) \right) e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} F_0 \left[ p + \frac{q}{c} (A_z(t) - A_z(t')) \right] dt'. \quad (5)$$

Выражение для плотности тока  $\mathbf{j} = (0, 0, j_z)$  можно записать, воспользовавшись полуклассическим приближением,

$$j_z = \frac{q}{\pi \hbar} \sum_s \int dp_z v_z f, \quad (6)$$

где  $v_z = \partial E(\mathbf{p})/\partial p_z$  — скорость электрона,  $q$  — заряд электрона.

Отметим также, что уравнение (3) записано в пренебрежении эффектами, связанными с неоднородностью электромагнитного поля вдоль оси нанотрубки. С одной стороны, это оправдано введенным выше предположением о плоском характере волнового фронта лазерного импульса, а с другой — нанометровые размеры частиц вещества предполагают выполнение данного приближения с хорошей точностью. Необходимо отметить и то обстоятельство, что в рамках используемой полуклассической модели не учтены межзонные переходы.

Как показано в [24], это накладывает ограничение на максимальную частоту лазерных импульсов, которая для УНТ лежит в ближней инфракрасной области.

Полагая, что время релаксации  $\tau$  мало по сравнению с характерным временем в системе, можно пренебречь первым слагаемым в уравнении (5) и сделать замену  $p \rightarrow p - \frac{e}{c} (A_z(t) - A_z(t'))$ . В этом случае выражение для плотности тока примет вид

$$j_z = \frac{q}{\pi \hbar \tau} \sum_s \int_{-\infty}^t \int_{-q_0}^{q_0} dt' dp_z v_z \times \left[ s, p - \frac{q}{c} (A_z(t) - A_z(t')) \right] F_0(\mathbf{p}) e^{-(t-t')/\tau}, \quad (7)$$

где интегрирование ведется по первой зоне Бриллюэна УНТ,  $q_0 = \frac{2\pi \hbar}{3b}$  — импульс на границе зоны Бриллюэна. Компоненту скорости  $v_z(s, p)$  можно разложить в ряд Фурье

$$v_z(s, p) = \sum_m a_{ms} \sin(mp),$$

$$a_{ms} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_z(s, p) \sin(mp) dp. \quad (8)$$

Коэффициенты разложения  $a_{ms}$  на примере УНТ (6,0) представлены в таблице. Как видно из таблицы, коэффициенты с ростом  $m$  убывают по модулю, и с достаточной степенью точности можно ограничиться первыми несколькими не исчезающими слагаемыми. Тогда выражение для осевой компоненты плотности тока примет вид

$$j_z = \frac{q}{\pi \hbar \tau} \sum_{ms} a_{ms} \int_{-\infty}^t dt' \sin \left[ \frac{maq}{c} (A_z(t) - A_z(t')) \right] e^{-(t-t')/\tau} \times \int_{-q_0}^{q_0} dp_z \cos(ma p_z) F_0(\mathbf{p}). \quad (9)$$

Интеграл, содержащий временную экспоненту, преобразуется известным в теории полупроводниковых сверхрешеток приемом [25,26]. Сделав замену  $\rho = t - t'$  и учитывая, что решение для  $A_z(t)$  ищется в классе быстро убывающих функций, примем во внимание и то обстоятельство, что время  $\tau$  достаточно велико при типичных длительностях ультракоротких лазерных импульсов. Это приводит к тому, что  $A_z(t - \rho) \approx A_z(-\infty) = 0$ .

Коэффициенты  $a_{ms}$  для нанотрубок типа (6,0) в единицах интеграла перескока  $\rho$

$m$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$
1	-0.956	-0.849	0	0.849	0.956	0.967
2	0.263	0.339	0	0.339	0.263	0.233
3	-0.111	-0.218	0	0.218	0.111	0.086
4	0.052	0.162	0	0.162	0.052	0.035
5	-0.026	-0.127	0	0.129	0.026	0.015
6	0.013	0.106	0	0.106	0.013	0.007
7	-0.007	-0.091	0	0.091	0.007	0.003

В результате всех преобразований получится уравнение для вектор-потенциала следующего вида:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} + \frac{q}{\pi \hbar} \sum_m c_m \sin \left( \frac{maq}{c} A_z(t) \right) = 0,$$

$$c_m = \sum_s a_{ms} b_{ms}, \quad b_{ms} = \int_{-q_0}^{q_0} dp_z \cos(ma p_z) F_0(\mathbf{p}). \quad (10)$$

Как показали результаты численных расчетов, коэффициенты  $b_{ms}$  сильно убывают с ростом  $m$  при любых температурах. При реальных же температурах в силу того, что  $\gamma \approx 2.5$  eV, можно воспользоваться низкотемпературным пределом для функции распределения Ферми. Все отмеченное выше приводит к тому, что в уравнении (10) можно ограничиться первыми двумя не исчезающими слагаемыми и получить широко применяемое в приложениях, но не интегрируемое методом обратной задачи рассеяния (тем более в двумерном случае) двойное уравнение sine-Gordon [27]. Из него следует теорема площадей: устойчивы по отношению к изменению формы только импульсы, имеющие определенную „площадь“. Кроме того, характер распада одиночного импульса сильно зависит от его скорости [28]. При увеличении относительной скорости импульсы начинают взаимодействовать все более и более упруго, и часть их энергии уходит в колебательные моды.

### 3. Обсуждение результатов

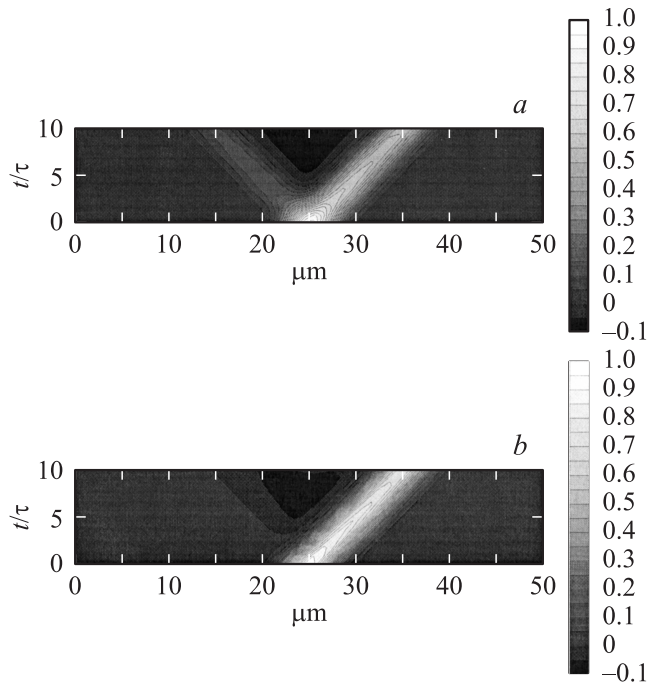
Исследуемые уравнения решались численно при помощи прямой разностной схемы типа „крест“ [29]. Шаги по времени и координате определялись из стандартных условий устойчивости. Шаги разностной схемы уменьшались последовательно в 2 раза до тех пор, пока решение не изменялось в восьмом знаке после запятой. Данные расчетов для одномерного случая представлены в работах [12–18], поэтому здесь приводятся только основные результаты, соответствующие плоскому фронту импульса.

Распространение импульсов при разных скоростях в одномерном случае для УНТ (6,0) проиллюстрировано на рис. 2. Яркость соответствует отношению амплитуды проходящего импульса к ее начальному значению, по оси  $x$  отложено расстояние, по оси  $y$  — время в единицах  $\tau$ . Начальный профиль импульса имел гауссов вид. Из рисунка видно, что ультракороткий импульс разделяется на два, и импульсы имеют существенно разную амплитуду. Отметим, что аналогичное поведение наблюдалось при исследовании аналога уравнения sine-Gordon в нелинейных линиях передачи с дисперсией [28].

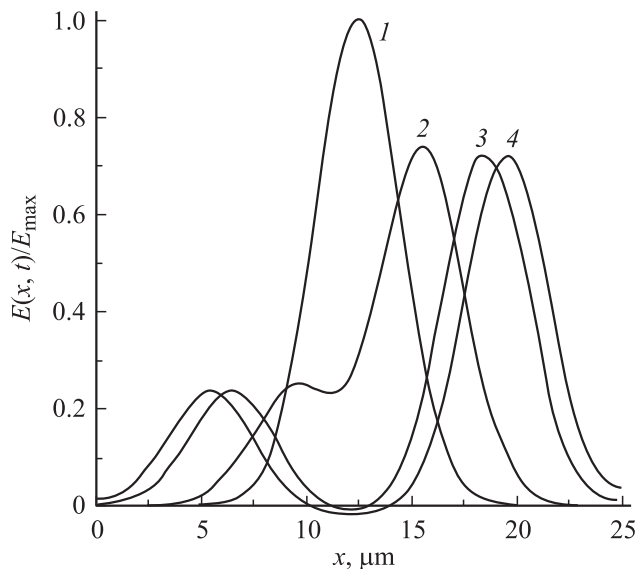
Последовательная эволюция формы электромагнитного импульса в одномерном случае при распротрагивании в пучках нанотрубок (6,0) приведена на рис. 3. Обратим внимание на то, что ультракороткий импульс „сбрасывает“ излишнюю „площадь“, которая отделяется

от импульса. Это связано с тем фактом, что, как уже упоминалось, рассматриваемую систему можно хорошо описать в рамках двойного уравнения sine-Gordon, для которого существует аналог теоремы площадей. При дальнейшем увеличении „площади“ начального импульса наблюдался также распад на большее количество импульсов, аналогичный тому, который описывался в [28].

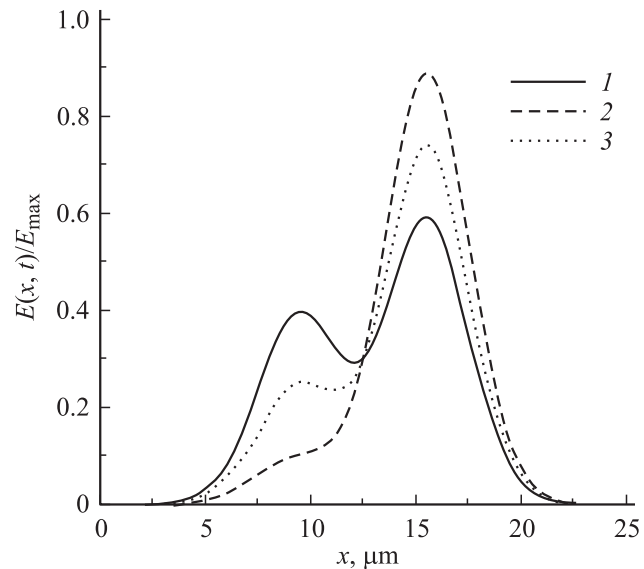
Особенности эволюции электромагнитного импульса в одномерном случае в зависимости от того, с какой



**Рис. 2.** Распространение импульса электромагнитного поля в пучках УНТ.  $v = 0.5c$  (a) и  $0.8c$  (b).



**Рис. 3.** Эволюция формы электромагнитного импульса при распространении в системе нанотрубок в моменты времени  $t = 0$  (1),  $2.33\tau$  (2),  $4.66\tau$  (3) и  $7\tau$  (4).



**Рис. 4.** Форма электромагнитного импульса в момент времени  $t = 2.33\tau$  при групповых скоростях  $v = 0.2c$  (1),  $0.5c$  (2),  $0.8c$  (3).

групповой скоростью он начинал свое движение в системе углеродных нанотрубок (6,0), представлены на рис. 4. Из рисунка видно, что при увеличении начальной скорости отделившийся импульс имеет гораздо меньшую „площадь“ и начинает отделяться от первоначального импульса позднее. Также обратим внимание на увеличение крутизны фронта импульса. Непосредственный расчет показал, что более „скоростной“ импульс индуцирует при своем движении в системе углеродных нанотрубок больший ток, который также определяется и временем релаксации функции распределения электронов к равновесному значению.

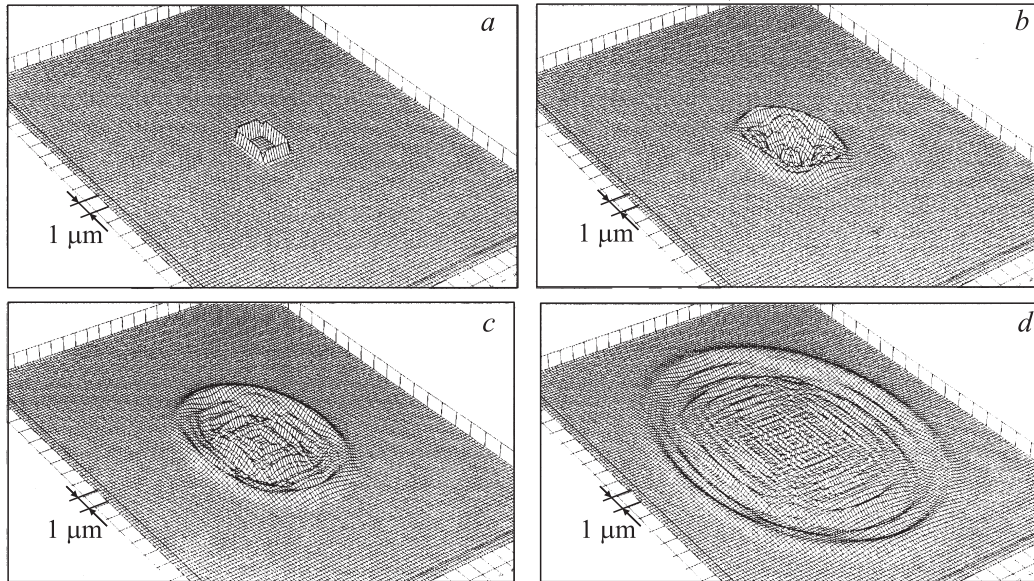
При варьировании начальных условий, т.е. при изменении формы электромагнитного импульса, входящего в УНТ, наблюдалась эволюция начального состояния в состоянии, которое аналогично по поведению бризерному решению уравнения sine-Gordon. Особенно сильно характер эволюции зависел, как показали результаты численных расчетов, от начальной групповой скорости импульса.

#### 4. Влияние размерности задачи

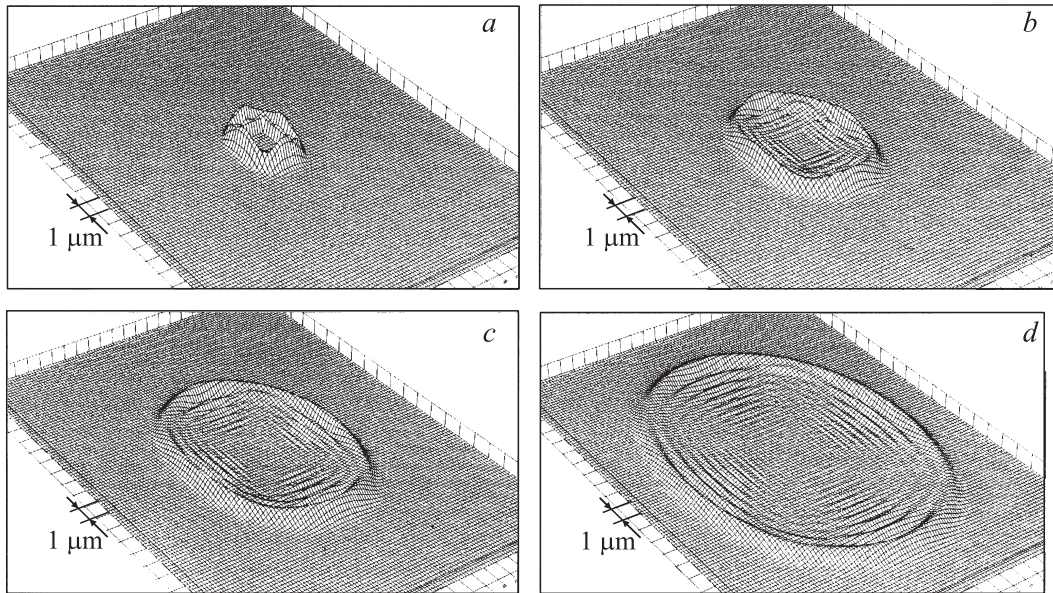
Описанные выше особенности поведения ультракороткого импульса в УНТ относятся к одномерному случаю.

В двумерном случае рассмотрение также проводилось для УНТ (6,0). Если электрическое поле в начальный момент времени сосредоточено в некоей области, а функция распределения электронов по импульсам соответствует равновесному случаю, то эволюция электромагнитного импульса будет иметь вид, представленный на рис. 5. На рисунке хорошо заметна расходящаяся волна с цилиндрической симметрией. От нее периодически „отделяются“ вторичные волны, которые создают





**Рис. 5.** Эволюция формы электромагнитного импульса при распространении в двумерном массиве нанотрубок. Величина плотности тока в моменты времени  $t = 0.2\tau$  (a),  $2\tau$  (b),  $4\tau$  (c) и  $8\tau$  (d).



**Рис. 6.** Эволюция формы электромагнитного импульса при распространении в двумерном массиве нанотрубок с учетом влияния постоянного электрического поля. Величина плотности тока в моменты времени  $t = \tau$  (a),  $3\tau$  (b),  $5\tau$  (c) и  $8\tau$  (d).

устойчивые колебания электрического поля. Подобное поведение вызвано, на наш взгляд, тем, что электромагнитное поле изменяет функцию распределения электронов в системе квантовых точек. Изменение функции распределения электронов в свою очередь приводит к появлению переменного тока, который приводит к генерации электромагнитного поля. Таким образом, происходит самосогласованное изменение классической функции распределения электронов и электрического поля.

Обнаруженное поведение электромагнитного поля, очевидно, означает, что распад начального состояния в

рассматриваемой задаче аналогичен динамике пульсона, которая была исследована в работах [30,31].

Заметим, что аналогичные результаты наблюдались и в случае, когда постоянно поддерживается электрическое поле в области, где было первоначально сосредоточено возмущение. Основные результаты для данного случая представлены на рис. 6. Главное отличие от результатов, представленных на рис. 5, состоит в следующем. Во-первых, образуется меньше „вторичных“ волн. На наш взгляд, это можно связать со стабилизирующим действием постоянного поля, которое продолжает

„генерировать“ волны, интерферирующие со „вторичными“ волнами, приводя к их исчезновению. „Генерация волн“ постоянным полем связана с изменением функции распределения электронов в системе квантовых точек. Здесь слово „генерация“ используется в том смысле, что происходит образование вторичных волн, поскольку стационарный режим еще не установился. Изменение функции распределения электронов, как отмечалось выше, приводит к появлению переменного тока в системе квантовых точек, который приводит к генерации электромагнитных волн. Во-вторых, амплитуда волны при распространении уменьшается слабее, чем без постоянного поля.

Подобное поведение можно связать с тем, что волны, которые образуются вследствие наличия постоянного поля в центре массива УНТ, взаимодействуют с фронтом нелинейной волны и уменьшают потери амплитуды фронта волны на дисперсионное расплывание.

Таким образом, в двумерном массиве УНТ могут распространяться устойчивые нелинейные волны, в которых нелинейные эффекты компенсируют дисперсионное расплывание.

## 5. Заключение

На основании проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

1) Предложена модель, описывающая динамику ультракороткого лазерного импульса в пучках УНТ, и указаны приближения, используемые при построении модели. Получено эффективное уравнение для динамики электрического поля в системе УНТ, которое имеет вид, аналогичный двойному уравнению  $\text{sine-Gordon}$ . Оценены вклады высших гармоник, которые вносят возмущение в эффективное двойное уравнение  $\text{sine-Gordon}$ .

2) Численные расчеты показали, что электромагнитный импульс при прохождении УНТ разделяется на два, причем меньший импульс имеет величину, определяемую начальной групповой скоростью импульса. Подобное поведение связывается с наличием аналога теоремы площадей в системах, описываемых двойным уравнением  $\text{sine-Gordon}$ .

3) Исследования показали, что в двумерном случае возможны устойчивые нелинейные волны, которые имеют динамику, аналогичную динамике пульсонов в двумерном нелинейном уравнении  $\text{sine-Gordon}$ .

4) Приложение постоянного электрического поля в конечной области двумерного массива УНТ стабилизирует распространение нелинейной волны — пульсона.

## Список литературы

- [1] Ч. Пул, Ф. Оуэнс. Нанотехнологии, Техносфера, М. (2004). 328 с.
- [2] Нанотехнология в ближайшем десятилетии. Прогноз направления исследований / Под ред. М.К. Роко, Р.С. Уильямс, П. Аливисатос. Мир, М. (2002). 296 с.
- [3] S.A. Maksimenko, G. Ya. In: Handbook of nanotechnology. Nanometer structure: theory, modeling, and simulation. SPIE Press, Bellingham (2004). P. 145.
- [4] S. Aubry. Solitons and condensed matter physics / Eds A.R. Bishop, T. Schneider. Springer-Verlag, Berlin (1979). 264 p.
- [5] С.А. Козлов, С.В. Сазонов. ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
- [6] G.Ya. Slepyan, S.A. Maksimenko, V.P. Kalosha, J. Harmann, E.E.B. Campbell, I.V. Hertel. Phys. Rev. A **60**, R 777 (1999).
- [7] X. Хаген. В кн.: Нелинейная спектроскопия. Мир, М. (1979). 452 с.
- [8] Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. Оптические солитоны. От волоконных светодиодов до фотонных кристаллов. Физматлит, М. (2005). 648 с.
- [9] М.Б. Белonenko, Е.В. Демушкина, Н.Г. Лебедев. Изв. РАН. Сер. физ. **70**, 1817 (2006).
- [10] Г. Хаген. Синергетика. Мир, М. (1980). 346 с.
- [11] П. Харрис. Углеродные нанотрубы и родственные структуры. Новые материалы XXI века. Техносфера. М. (2003). 336 с.
- [12] M.B. Belonenko, E.V. Demushkina, N.G. Lebedev. J. Russian Laser Res. **27**, 457 (2006).
- [13] М.Б. Белonenko, Е.В. Демушкина, Н.Г. Лебедев. Изв. РАН. Сер. физ. **72**, 28 (2008).
- [14] М.Б. Белonenko, Е.В. Демушкина, Н.Г. Лебедев. ФТТ **50**, 367 (2008).
- [15] М.Б. Белonenko, Е.В. Демушкина, Н.Г. Лебедев. Изв. РАН. Сер. физ. **72**, 711 (2008).
- [16] М.Б. Белonenko, Е.В. Демушкина, Н.Г. Лебедев. ЖТФ **78**, 1 (2008).
- [17] М.Б. Белonenko, Е.В. Демушкина, Н.Г. Лебедев. Хим. физика **27**, 97 (2008).
- [18] M.B. Belonenko, E.V. Demushkina, N.G. Lebedev. Proc. SPIE **7024**, 70 240U (2008).
- [19] X. Гиббс. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. Мир, М. (1988). 520 с.
- [20] M.F. Lin, K.W.-K. Shung. Phys. Rev. B **50**, 17 744 (1994).
- [21] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Физическая кинетика. Физматлит, М. (1979). 528 с.
- [22] R. Saito, M. Fujita, G. Dresselhaus, M.S. Dresselhaus. Phys. Rev. B **46**, 1804 (1992).
- [23] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. Изд-во МГУ, М. (1999). 798 с.
- [24] Э.М. Эпштейн. ФТТ **19**, 3456 (1976).
- [25] Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. Высоочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. Наука, М. (1989). 326 с.
- [26] С.В. Крючков. Полупроводниковые сверхрешетки в сильных полях. Перемена, Волгоград (1992). 67 с.
- [27] Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. Мир, М. (1983). 408 с.
- [28] P.W. Kitchenside, P.J. Caudrey, R.K. Bullough. Phys. Scripta **20**, 673 (1979).
- [29] Н.С. Бахвалов. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). Наука, (1975). 630 с.
- [30] И.Л. Боголюбовский, В.Г. Маханьков. Письма в ЖЭТФ **25**, 120 (1979).
- [31] I.L. Bogolubsky, V.G. Makhankov, A.B. Shvachka. Phys. Lett. A **63**, 225 (1979).