

УДК 537.311

© 1992

## НЕЛИНЕЙНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА СКОРОСТИ ЗВУКА В МЕТАЛЛАХ

В. А. Бурдов, В. Я. Демиховский

Рассмотрен эффект перенормировки скорости мощной акустической волны в металле, обусловленный нелинейным взаимодействием звука с резонансными электронами. Показано, что изменение скорости звука связано главным образом с неквадратичностью электронного спектра и с зависимостью деформационного потенциала от импульса. Если частота электронных столкновений  $\tau_p^{-1}$  много меньше характерной частоты  $\omega$  нелинейных колебаний частиц в потенциальных ямах, созданных волной, то величина относительного изменения скорости имеет порядок  $10^{-3}$ — $10^{-6}$  при деформациях решетки  $10^{-4}$ .

При распространении продольного и поперечного звука в чистых проводниках наблюдаются разнообразные эффекты, имеющие динамическую природу. Сюда могут быть отнесены такие явления, как нелинейное затухание звука [1, 2], взаимодействие сильной и слабой волн [3], интенсивная генерация акустических гармоник [4]. В проводниках, помещенных в магнитное поле, также имеет место ряд специфических нелинейных эффектов [5, 6], в том числе нелинейные магнитоакустические осцилляции и акустический циклотронный резонанс [7, 8]. Экспериментально перечисленные эффекты наблюдались и детально исследовались Филем с сотр. [9–11], а впервые обнаружены в работе [12] (нелинейное поглощение звука).

Все эти эффекты обусловлены резонансным взаимодействием мощной звуковой волны с частицами — носителями тока — и проявляются при таких интенсивностях звука, когда тензор деформации еще мал:  $u_{ik} \ll 1$ .

При теоретическом рассмотрении нелинейных динамических явлений движение частиц в поле монохроматической волны описывалось в основном уравнениями типа математического маятника, т. е. зависимость энергии от импульса считалась квадратичной, а деформационный потенциал  $\Lambda_{ik}$ , определяющий энергию электронов в поле волны, — не зависящим от импульса. Во многих задачах такое приближение является оправданным, поскольку учет неквадратичности спектра и непостоянства  $\Lambda_{ik}(p)$  на поверхности Ферми действительно приводит лишь к малым поправкам.

В настоящей работе будет проведен расчет нелинейной перенормировки скорости звука. Мы покажем, что в металлах со сложным законом дисперсии  $\epsilon(p)$  эффект связан с неквадратичностью электронного спектра и зависимостью деформационного потенциала от импульса. Эффект перенормировки скорости звука наблюдался экспериментально в [1] в сверхчистом галлии.

## 1. Динамика частиц

На электрон в деформированном кристалле, как известно, действует деформационная сила, связанная с изменением его энергии, а также сила Лоренца со стороны макроскопических электромагнитных полей, сопровождающих волну.

В частности, для продольного звука (именно эту ситуацию мы и рассмотрим ниже) в системе координат, сопутствующей решетке, эта сила равна

$$\Lambda_{ik}(\mathbf{p}) \cdot \nabla U_{ik}(\mathbf{r}, t),$$

где  $\Lambda_{ik}(\mathbf{p}) = \lambda_{ik}(\mathbf{p}) - \lambda_{ik}$  — перенормированный тензор деформационного потенциала;  $\lambda_{ik}$  — тензор деформационного потенциала, усредненный по Ферми-поверхности  $[\tau_3]$ .

Гамильтониан электрона в поле продольной волны запишем, разложив функции  $\varepsilon(\mathbf{p})$  и  $\Lambda_{ik}(\mathbf{p})$  в окрестности пояска эффективного взаимодействия  $k\nu = \omega$

$$H = \frac{(p_x - p_0)^2}{2m_{xx}} - \frac{m'_{xx}}{6m_{xx}^2} (p_x - p_0)^3 - \\ - ku_0 \left( \Lambda_{xx}(p_0) + \Lambda'_{xx}(p_0) (p_x - p_0) \right) \cos(kx - \omega t), \quad (1)$$

где  $p_0$  — резонансное значение импульса  $p_x$  на пояске,  $u_0$  — амплитуда смещения атомов решетки,

$$m_{xx}^{-1} = \left. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_x^2} \right|_{p_x = p_0}.$$

а штрих означает производную по импульсу  $p_x$ . Уравнения движения, порожденные гамильтонианом (1), удобно записать в безразмерной форме, введя канонически-сопряженные импульс  $s = (p_x - p_0) / \bar{p}$  и координату  $\xi = kx - \omega t$ , а также время  $\tau = \bar{\omega} t$

$$\frac{ds}{d\tau} = -\sin \xi - \nu s \sin \xi,$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = s + 3\mu s^2 - \nu \cos \xi. \quad (2)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\nu = \varepsilon^{1/2} \Lambda'_{xx} (m_{xx} / \Lambda_{xx})^{1/2} \ll 1,$$

$$\mu = -\frac{\varepsilon^{1/2}}{6} m'_{xx} \left( \frac{\Lambda_{xx}}{m_{xx}} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (3)$$

— безразмерные малые параметры,

$$\tilde{\omega} = k (\varepsilon \Lambda_{xx} / m_{xx})^{1/2}, \quad \tilde{p} = (\varepsilon \Lambda_{xx} m_{xx})^{1/2} \quad (4)$$

— характерные частота колебаний и ширина резонанса, а параметр  $\epsilon = k\mu_0 \ll \ll 1$ .

Далее целесообразно перейти к новому каноническому импульсу

$$v = s - \nu \cos \xi,$$

что позволяет упростить уравнение движения в линейном по  $\mu$  и  $\nu$  приближении

$$\frac{dv}{d\tau} = -\sin \xi,$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \nu + 3\mu\nu^2. \quad (5)$$

Соответствующий этим уравнениям гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{v^2}{2} - \cos \xi + \mu v^3 \quad (6)$$

и отличается от функций гамильтониана математического маятника малой добавкой  $\mu v^3$ .

Стационарные точки системы (5) определяются из условий  $\dot{v} = 0, \dot{\xi} = 0$ , что дает

$$\xi = \pi n, \quad v = 0.$$

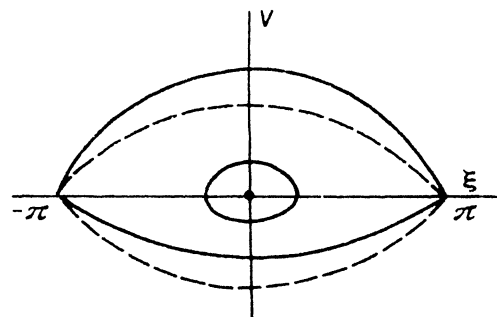
Фазовые траектории, как это следует из (6), не симметричны относительно замены  $v \rightarrow -v$  (см. рисунок).

В дальнейшем при вычислении функции распределения электронов нам понадобится среднее по времени значение импульса  $s$ , равное  $\nu + \nu \overline{\cos \xi}$ . Для нахождения  $\overline{v}$  определим  $v_0$  как

$$v_0 = \pm (2(H + \cos \xi))^{1/2}$$

и с помощью (6) получим зависимость  $v(\xi)$  при малом  $\mu$

$$v(\xi) = v_0 - \mu v_0^2. \quad (7)$$



Фазовые траектории системы (6).

Штрихом показано положение сепаратрисы при  $\mu = 0$ .

Теперь величину  $\overline{v}$  найдем, вычисляя следующий интеграл по периоду

$$\begin{aligned} \overline{v} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau v(H, \tau) = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi (1 - 3\mu v_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Подробные вычисления интегралов (8), проведенные в работе [14], приводят к выражениям

$$\bar{v} = \frac{\pi}{\kappa K(\kappa)} + 2\mu \left( \frac{\pi}{\kappa K(\kappa)} \right)^2 - 12\mu \frac{E(\kappa)}{\kappa^2 K(\kappa)} \quad (9)$$

для пролетных частиц ( $|\chi| < 1$ ) и

$$\bar{v} = -12\mu \frac{E(\kappa^{-1}) - (1 - \kappa^{-2}) K(\kappa^{-1})}{K(\kappa^{-1})} \quad (10)$$

для захваченных частиц ( $|\chi| > 1$ ). Параметр  $\kappa$  связан с гамильтонианом частицы соотношением

$$\kappa^2 = 2/(H + 1),$$

а его знак совпадает со знаком импульса  $v$ . Вычисление среднего значения  $\overline{\cos \xi}$  дает соответственно для пролетных и захваченных частиц выражение

$$\cos \xi = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\kappa^2} \left( \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right), & |\chi| < 1, \\ 2 \frac{E(\kappa^{-1})}{K(\kappa^{-1})} - 1, & |\chi| > 1, \end{cases} \quad (11)$$

причем здесь можно ограничиться нулевым порядком по  $\mu$ , поскольку  $\overline{\cos \xi}$  в выражение для  $\bar{v}$  входит вместе с малым множителем  $\nu$ .

В заключение настоящего раздела отметим, что к рассмотренным здесь уравнениям движения (2) сводится также задача о движении частицы в поле циркулярно-поляризованной электромагнитной волны, распространяющейся в металле в направлении однородного магнитного поля [14].

## 2. Перенормировка скорости звука

Спектр и затухание звука определяются из уравнений теории упругости, в правой части которых содержится сила, действующая со стороны электронов на решетку [15]. Для продольного звука, распространяющегося вдоль оси симметрии высокого порядка, имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \langle \Lambda_{xxg} \rangle, \quad (12)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\lambda$  — компонента тензора модулей упругости,  $g$  — неравновесная добавка к фермиевской функции распределения электронов,  $u_x = u_0 \sin(kx - \omega t)$  — смещение решетки в направлении распространения волны, а скобки  $\langle \dots \rangle$  означают следующее:

$$\langle A \rangle = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int dp \cdot A.$$

Вклад нерезонансных электронов включен в модуль упругости  $\lambda$ .

Чтобы найти нелинейную перенормировку скорости звука, обусловленную взаимодействием с резонансными частицами, подставим  $u_x$  в (12), что дает

$$(s_0^2 - c^2) k^2 u_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle \Lambda_{xx} g \rangle}{\rho}, \quad (13)$$

где  $s_0$  — скорость звука, перенормированная взаимодействием с нерезонансными электронами, а скорость  $c$  учитывает также взаимодействие с резонансными частицами в нелинейном режиме. Записав такое же уравнение в линейном приближении

$$(s_0^2 - c_0^2) k^2 u_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle \Lambda_{xx} g_L \rangle}{\rho}, \quad (14)$$

где  $g_L$  — линейная функция распределения, а скорость  $c_0$  не зависит от амплитуды, получим выражение для нелинейной перенормировки скорости звука

$$\Delta c = c - c_0 = \frac{1}{2\pi\rho c_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \langle \Lambda_{xx} \cdot (g - g_L) \rangle \cos \xi. \quad (15)$$

Для вычисления правой части (15) необходимо решить кинетическое уравнение Больцмана и найти функции  $g$  и  $g_L$ . Функцию распределения  $f$ , являющуюся решением кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p_x} + \frac{f - f_0}{\tau_p} = 0,$$

удобно искать в виде

$$f = f_0(\varepsilon(p, r, t) - \mu_0) + g,$$

где  $f_0$  — локально-равновесная функция распределения,  $\mu_0$  — химический потенциал,  $\tau_p$  — ухонное время. Уравнение для  $g$ -функции получим, используя безразмерные переменные  $s$  и  $\tau$ , введенные ранее

$$\frac{dg}{d\tau} + ag = -cf_0' \frac{ds}{d\tau}, \quad (16)$$

где  $f_0' = df_0/d\varepsilon$ , а параметр  $a = (\bar{\omega}\tau_p)^{-1}$ . В условиях развитой нелинейности параметр  $a$ , равный отношению характерной частоты нелинейных колебаний к частоте электронных столкновений, должен быть много меньше единицы. Известно, что члены, линейные по  $a$  в функции распределения, являющейся решением (16), определяют нелинейное затухание звуковой волны [1], в то время как эффект перенормировки скорости возникает уже в нулевом порядке по  $a \ll 1$ .

Поэтому, опуская в (16) слагаемое, пропорциональное параметру  $a$ , запишем решение в виде

$$g = -c\tilde{p}'_0 (s - \bar{s}), \quad (17)$$

где  $\bar{s}$  — среднее за период значение безразмерного импульса частицы. Формула (17) описывает как захваченные, так и пролетные частицы; соответственно  $\bar{s}$  определяется выражениями (9)—(11), из которых следует, что разница  $s - \bar{s}$  достаточно быстро убывает до нуля при удалении от резонансного пояса  $kv = \omega$ . В линейном приближении выражение для неравновесной добавки (17) переходит в

$$g_L = -c\tilde{p}'_0 \frac{1 + \nu s}{s + 3\mu s^2} \cos \xi. \quad (18)$$

Теперь обратимся к вычислению интеграла (15). Подставляя  $g$ - функции (17) и (18) в (15) и разлагая  $\Lambda_{xx}$  до первого порядка по  $s$  в окрестности пояса  $kv = \omega$ , будем иметь

$$\Delta c = - \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 \pi\rho} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos \xi \int dp'_0 \Lambda_{xx}(p_0) \times \\ \times (1 + \nu s) \left( s - \bar{s} - \frac{1 + \nu s}{s + 3\mu s^2} \cos \xi \right). \quad (19)$$

Здесь от интегрирования по  $dp$  удобно перейти к новым переменным  $\varepsilon, s, \varphi$  по формуле

$$dp = m_{\perp} \tilde{p} d\varepsilon ds d\varphi,$$

где  $m_{\perp} \equiv p_{\perp} / v_{\perp}$ , а  $\varphi$  — полярный угол в плоскости, перпендикулярной  $p_x$ . Учитывая зависимость функции  $m_{\perp}$  от  $p_x$  и снимая интеграл по энергии с помощью  $\delta$ -функции, получим

$$\Delta c = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 \pi\rho} \int_0^{2\pi} d\varphi m_{\perp}(p_0) \Lambda_{xx}^2(p_0) m_{xx}(p_0) \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos \xi \int_{-\infty}^{+\infty} ds (1 + (\nu + \gamma) s) \left( s - \bar{s} - \frac{1 + \nu s}{s + 3\mu s^2} \cos \xi \right), \quad (20)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{m_{\perp}} \frac{\partial m_{\perp}}{\partial p_x} (\in \Lambda_{xx} m_{xx})^{1/2} < 1,$$

а значение импульса  $p_0$  на пояске зависит от угла  $\varphi$ .

Для того чтобы найти  $\bar{s}$  равное

$$\bar{s} = \bar{v} + v \overline{\cos \xi},$$

нужно воспользоваться выражениями (9)—(11), после чего перейти от интегрирования по  $s$  и  $\xi$  к интегрированию по  $x$  и  $\xi$

$$dsd\xi = v d\xi = -\frac{2}{x^2} \frac{dx d\xi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \xi/2}}.$$

В результате после интегрирования найдем окончательное выражение для нелинейной перенормировки скорости звука

$$\Delta c = -\frac{32\epsilon^{1/2}}{(2\pi\hbar)^3\rho} \langle m_{xx} m_{xx}^{3/2} \Lambda_{xx}^{5/2} \left( \frac{F}{3} \frac{m'_{xx}}{m_{xx}} + Q \frac{\Lambda'_{xx}}{\Lambda_{xx}} \right) \rangle, \quad (21)$$

где угловые скобки означают усреднение по пояску  $kv = \omega$ , а числовые константы  $F$  и  $Q$  определяются согласно выражениям

$$F = \int_0^1 dx \left[ x (2E(x) - K(x)) \left( 6 \frac{E(x)}{K(x)} + 4x^2 - 5 \right) + \frac{1}{x^2} \left( \frac{2}{x^2} - 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi^2}{x^2 K^2(x)} - 6 \frac{E(x)}{x^2 K(x)} \right) \left( \left( \frac{2}{x^2} - 1 \right) K(x) - \frac{2}{x^2} E(x) \right) \right] = 0.44,$$

$$Q = \int_0^1 \frac{dx}{K(x)} \left[ x (2E(x) - K(x))^2 + \frac{(x^2 K(x) + 2(E(x) - K(x)))^2}{x^6} \right] = 0.32.$$

Оценим величину эффекта. Полагая  $\Lambda_{xx} \sim \epsilon_F$ ,  $\Lambda'_{xx} \sim \Lambda_{xx}/\rho_F$ ,  $m'_{xx} \frac{m_{xx}}{\rho_F}$  будем иметь

$$\frac{\Delta c}{c} \sim \epsilon^{1/2} \frac{c}{v_F},$$

что дает величину относительного изменения скорости порядка  $10^{-5}$ — $10^{-6}$  при деформациях  $\epsilon \sim 10^{-4}$ . Именно такое значение  $\Delta c/c$  и было обнаружено в эксперименте, проведенном в галлии [9], при мощности звуковой волны порядка  $10$  Вт/см<sup>2</sup>.

Как следует из выражения (21), в перенормировку скорости дают аддитивный вклад слагаемые, содержащие производные по  $p_x$  от эффективной массы и деформационного потенциала, т. е. этот эффект связан с неквадратичностью электронного спектра и с зависимостью  $\Lambda_{xx}$  от импульса  $p_x$ . По-видимому, оба слагаемых имеют одинаковый порядок. Знак эффекта может быть как положительным, так и отрицательным и зависит от направления распространения звука, а также от конкретного металла.

Заметим, что эффект нелинейной перенормировки скорости звуковой волны возможен также и в случае, если деформационный потенциал является константой, а закон дисперсии изотропный и квадратичный. Соответствующий механизм впервые рассматривался Моралесом и О'Нейлом [16] на примере продольной плазменной волны. Для расчета перенормировки в этом случае необходимо в правой части уравнения (16) учесть зависимость  $f_0'$  от импульса  $s$ . Проведя разложение  $f_0'$  в ряд по  $s$ , получим дополнительные слагаемые в функции распределения, пропорциональные  $f_0''$ ,  $f_0'''$  и т. д. Эта процедура была выполнена в работе [17]. Оказалось, что в вырожденном электронном газе при квадратичном законе дисперсии величина перенормировки  $\Delta c$  пропорциональна экспоненциально малому множителю  $\exp(-\varepsilon_F/T)$  ( $T$  — температура), возникающему при интегрировании функции распределения по энергии поперечного движения. Однако если зависимость энергии от  $p_{\perp}$  неквадратична — эффект не столь мал, он имеет порядок

$$\frac{\Delta c}{c} \sim \epsilon^{1/2} \left( \frac{c}{v_F} \right)^2,$$

т. е. в  $v_F/c \sim 10^3$  раз меньше величины перенормировки, полученной в настоящей работе. Таким образом, в типичных металлах механизм перенормировки, рассмотренный нами, является доминирующим.

Кроме того, как уже отмечалось, все результаты, представленные здесь, получены в пренебрежении электронными столкновениями. Можно показать, что неучтенные нами нелинейные поправки к скорости звука, связанные со столкновениями, имеют дополнительную относительную малость порядка нелинейности  $a \ll 1$ .

#### Список литературы

- [1] Гальперин Ю. М., Каган В. Д., Козуб В. И. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. № 4. С. 1521—1530.
- [2] Гальперин Ю. М., Гуревич В. Л., Козуб В. И. // УФН. 1979. Т. 128. № 1. С. 107—133.
- [3] Демиховский В. Я., Максимова Г. М. // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. № 5. С. 1738—1747.
- [4] Вугальтер Г. А., Демиховский В. Я. // ФТТ. 1977. Т. 19. № 9. С. 1655—1664.
- [5] Гальперин Ю. М., Козуб В. И. // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. № 3. С. 1083—1095.
- [6] Козуб В. И. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. № 3. С. 1014—1031.
- [7] Бурдов В. А., Демиховский В. Я. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 7. С. 150—163.
- [8] Бурдов В. А., Демиховский В. Я. // ЖЭТФ. 1990. Т. 97. № 1. С. 343—358.
- [9] Филь В. Д., Денисенко В. И., Безуглый П. А. // ФНТ. 1975. Т. 1. № 9. С. 1217—1219.
- [10] Филь В. Д., Гайдук А. Л., Денисенко В. И. // ЖЭТФ. 1980. Т. 78. № 4. С. 1464—1473.
- [11] Fil V. D., Gaiduck A. L., Denisenko V. I. // J. Low Temp. Phys. 1982. V. 47. № 3/4. P. 207—222.
- [12] Иванов С. Н., Котелянский И. М., Мансфельд Г. Д., Хазанов Е. Н. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. № 6. С. 283—285.
- [13] Ахиезер А. И., Каганов М. И., Любарский Г. Я. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. № 4. С. 837—841.
- [14] Бурдов В. А., Демиховский В. Я. // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. № 6. С. 647—661.
- [15] Конторович В. М. // УФН. 1984. № 2. С. 265—307.
- [16] Morales G. J., O'Neil T. M. // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28. P. 417—421.
- [17] Демиховский В. Я., Шматкова Н. И. // ФНТ. 1978. Т. 4. № 2. С. 256—260.

Государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского  
Нижний Новгород

Поступило в Редакцию  
1 апреля 1992 г.  
В окончательной редакции  
9 июня 1992 г.