

УДК 537.311.322

© 1992

## ПОЛЯРИЗАЦИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКАЯ ЯМА

О. З. Олендский

Теоретически исследовано комбинированное влияние на бесконечно глубокую потенциальную яму перпендикулярного границам раздела электрического поля  $F$  и параллельного интерфейсам магнитного поля  $B$ . Показано, что поляризация основного состояния монотонно убывает с ростом индукции магнитного поля и в сильных магнитных полях тем ближе к нулю, чем меньше  $F$ . Поляризация в возбужденных состояниях имеет как функция  $B$  ярко выраженный максимум, причем для высележащих уровней он достигается при больших  $B$ . В широком интервале изменения  $F$  положения резонансов на оси  $B$  остаются неизменными, а их величины возрастают с ростом  $F$ .

Успехи в выращивании наноструктур стимулируют углубленное теоретическое изучение их свойств. Простейшим элементом наноэлектроники является потенциальная яма конечной или бесконечной глубины. В обоих случаях поведение микрочастицы хорошо известно [1]. Для бесконечно глубокой ямы электрон (для определенности будем говорить об электроне) массой  $m$  описывается волновой функцией

$$\Psi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \quad (1)$$

( $a$  — ширина ямы;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), что соответствует уровням энергии  $E_n = (\pi^2 \hbar^2 n^2) / (2ma^2)$ . Для ямы конечной глубины волновая функция проникает в барьеры, экспоненциально затухая на  $\pm\infty$ . Электронные уровни энергии при этом сдвигаются от уровней бесконечной ямы. Число же уровней определяется шириной ямы  $a$  и ее глубиной  $V_w$ .

В серии недавних публикаций исследовалось влияние электрического поля на характеристики квантовой ямы [2-14]. Было показано, что уровни энергии при наложении электрического поля возрастают; <sup>1</sup> при этом для конечной ямы они могут превзойти ее глубину и соответствующее состояние будет принадлежать непрерывному спектру. Поляризация в основном состоянии монотонно возрастает для бесконечно глубокой ямы [10] и имеет широкий максимум для конечной ямы [11]. Поляризация в возбужденных состояниях убывает для слабых полей, проходит через минимум и далее увеличивается с ростом напряженности электрического поля [10, 11].

С другой стороны, известно, что наложение на бесконечно глубокую яму параллельного границам раздела магнитного поля и его возрастание

<sup>1</sup> Условимся отсчитывать энергию от правого нижнего края ямы (рис. 1). В этом случае уровни энергии при подаче напряжения возрастают [10]. Если же за нулевую принять энергию левой нижней точки, то при подаче напряжения энергия уровней уменьшается [2, 6, 8, 9].

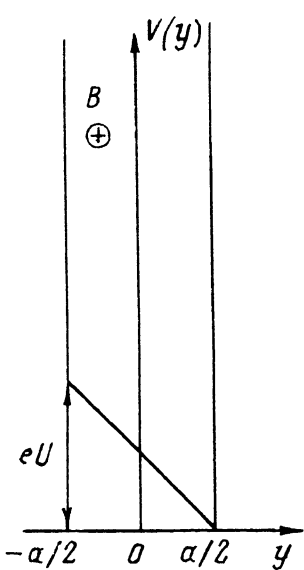


Рис. 1. Анализируемая структура.

ведут к трансформации уровней энергии ямы в магнитные уровни Ландау [5]. Для конечной ямы при этом образуются новые уровни, не реализуемые при нулевом магнитном поле [16]. Их энергия всегда превосходит глубину ямы; при уменьшении магнитного поля они стремятся к  $V_w$ , а при его возрастании переходят в уровни Ландау, упорядоченно расположенные по отношению к магнитным уровням, преобразованным из энергий ямы в отсутствие поля. Представляет как общезначимый, так и практический интерес исследовать комбинированное влияние на потенциальную яму электрического и перпендикулярного ему магнитного полей. Теоретическому изучению данной проблемы для бесконечно глубокой ямы посвящена настоящая работа. Близкая задача для ямы конечной глубины решалась в [17], где исследовалось поведение электрона в симметричной параболической яме под влиянием электрического поля. Физически это может соответствовать свободному электрону<sup>2</sup> в электрическом поле и пространственно ограниченном магнитном поле. При этом использовалось численное интегрирование уравнения Шредингера методом Рунге—Кутты пятого порядка. В данной работе предлагается эффективное решение поставленной задачи с помощью функций параболического цилиндра. Мы будем оперировать как подаваемым на структуру напряжением  $U$ , так и напряженностью электрического поля  $F = U/a$ .

Анализируемая структура приведена на рис. 1. Ось  $z$  совпадает с направлением  $B$ . Для рассматриваемого случая выберем калибровку Ландау, т. е. примем, что векторный потенциал имеет вид  $A = (-By, 0, 0)$ . Тогда в уравнении Шредингера (мы опускаем спиновую зависимость)

$$\frac{1}{2m} (p - eA)^2 \Psi + V(r) \Psi = E \Psi \quad (2)$$

отделяются переменные  $x$  и  $z$  и мы приходим к уравнению для функции  $\chi(y)$ , описывающей зависимость волновой функции от координаты  $y$

$$\frac{d^2 \chi}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ E - V(y) - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m}{2} \omega_B^2 (y - y_0)^2 \right\} \chi = 0, \quad (3)$$

где  $\omega_B = eB/m$ ,  $y_0 = p_x/eB$ ,  $p_x$  и  $p_z$  — компоненты обобщенного импульса вдоль осей  $x$  и  $z$ ,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона.

В рассматриваемом нами случае

$$V(y) = \begin{cases} \infty, & |y| > a/2, \\ -\frac{eU}{a} (y - \frac{a}{2}), & |y| \leq a/2, \end{cases} \quad (4)$$

<sup>2</sup> Как и в теории лазера на свободных электронах [18], под «свободным» мы понимаем электрон, не связанный в атоме или в какой-либо кристаллической наноструктуре.

и после элементарных преобразований мы получим в области  $|y| \ll a/2$  уравнение, аналогичное уравнению Вебера

$$\frac{d^2 W}{d\zeta^2} - \left( \frac{\zeta^2}{4} + c \right) W = 0, \quad (5)$$

решениями которого являются функции параболического цилиндра  $U(c, \zeta)$  и  $V(c, \zeta)$  [19, 20] (чтобы не путать напряжение  $U$  с функцией  $U(c, \zeta)$ , последняя везде в данной работе записывается с переменными  $c$  и  $\zeta$ ). В нашем случае

$$c = - \frac{E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{eU}{2} + \frac{eU}{2a} (2y_0 + \gamma_B)}{\hbar\omega_B},$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{2m\omega_B}{\hbar}} (y - y_0 - \gamma_B), \quad \gamma_B = \frac{eU}{am\omega_B^2}$$

и

$$\begin{aligned} \chi(y) = & A_1 U \left( - \frac{E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{eU}{2} + \frac{eU}{2a} (2y_0 + \gamma_B)}{\hbar\omega_B} \sqrt{\frac{2m\omega_B}{\hbar}} (y - y_0 - \gamma_B) \right) + \\ & + B_1 V \left( - \frac{E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{eU}{2} + \frac{eU}{2a} (2y_0 + \gamma_B)}{\hbar\omega_B} \sqrt{\frac{2m\omega_B}{\hbar}} (y - y_0 - \gamma_B) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим функции  $U(c, \zeta)$  и  $V(c, \zeta)$  из (6) при  $y = -a/2$  индексом 1, а при  $y = a/2$  — индексом 2. Тогда условие обращается в нуль волновой функции на границах ямы приводит к уравнению для определения уровней энергии

$$U_1 V_2 = U_2 V_1. \quad (7)$$

Условие нормировки

$$\int_{-a/2}^{a/2} \chi^2(y) dy = 1 \quad (8)$$

позволяет найти коэффициенты  $A_1$  и  $B_1 = -(U_1/V_1) A_1$  из (6). Таким образом, волновая функция  $\chi(y)$  полностью определена. Зная ее, можно найти нормированную поляризацию, которую определим формулой

$$P(U, y_0, B) = \langle eU \rangle_y - \langle eU \rangle_y = 0. \quad (9)$$

Чтобы явно показать зависимость поляризации от  $y_0$  и  $B$ , мы включили их в аргументы функции  $P$ . Угловые скобки обозначают среднее квантовомеханическое значение; в нашем случае

$$\langle ey \rangle_y = e \int_{-a/2}^{a/2} y \chi^2(y) dy. \quad (10)$$

Отметим, что выражение  $\langle ey \rangle_U$  имеет относительный смысл: его величина зависит от выбора начала координат. В частности, при выбранном нами начале отсчета координаты  $y$  в центре ямы значение  $\langle ey \rangle_{U=0}$  в отсутствие магнитного поля или при  $y_0 = 0$  тождественно равно нулю

$$\langle ey \rangle_{B=0}^{U=0} \equiv 0, \quad (11a)$$

$$\langle ey \rangle_{y_0=0}^{U=0} \equiv 0. \quad (11b)$$

В этом заключается некорректность определения поляризации  $P$  в [11]. Однако величина  $P$  из (9), являющаяся разностью двух таких значений, не зависит от выбора начала отсчета и имеет вполне определенный физический смысл: ее положительное (отрицательное) значение указывает на большую вероятность обнаружения частицы в правой (левой) половине ямы. Чем абсолютное значение  $P$  больше, тем эта вероятность выше. Укажем также, что в отсутствие магнитного поля, когда поведение электрона в яме описывается функциями Эйри  $Ai(\xi)$  и  $Bi(\xi)$  [19], вообще нет необходимости прибегать к численному интегрированию в (8), (10), как это было сделано в [14], поскольку в этом случае интегралы в (8), (10) выражаются аналитически через функции  $Ai(\xi)$ ,  $Bi(\xi)$  и их производные [21] в точках

$$\xi = -\xi_0 a \frac{E}{eU}, \quad \xi = -\xi_0 a \left( \frac{E}{eU} - 1 \right), \quad \xi_0 = \left( \frac{2meU}{a\hbar^2} \right)^{1/3}.$$

По этой же причине излишне и численное интегрирование уравнения Шредингера, проведенное в [13, 17].

Поляризуемость  $\alpha$  есть

$$\alpha = \frac{P}{F}. \quad (12)$$

Рис. 2, 3 соответственно характеризуют зависимость энергий частицы от индукции  $B$  при фиксированных  $U$  и от напряжения  $U$  при фиксированных  $B$ . Вычисления проводились при следующих параметрах:  $a = 10$  нм,  $p_x = p_z = 0$ ,  $m = 0.067m_e$ ,  $m_e$  — масса электрона. При выбранных таким образом значениях центр обусловленных магнитным полем колебаний совпадает с серединой ямы. Как отмечалось в [15], этот случай фактически наиболее интересен, поскольку при  $F = 0$  потенциал в (3) и граничные условия симметричны относительно центра ямы. Анализ показывает, что при фиксированных напряжениях  $U$  энергии состояний  $E_i$  возрастают с ростом  $B$ ; при этом величины  $(E_i - 0.5$  эВ) стремятся к уровням Ландау. Электрическое поле  $F$  при своем возрастании представляет большее возмущение, и поэтому с ростом  $U$  трансформация к уровням Ландау происходит в более сильных магнитных полях. По той же

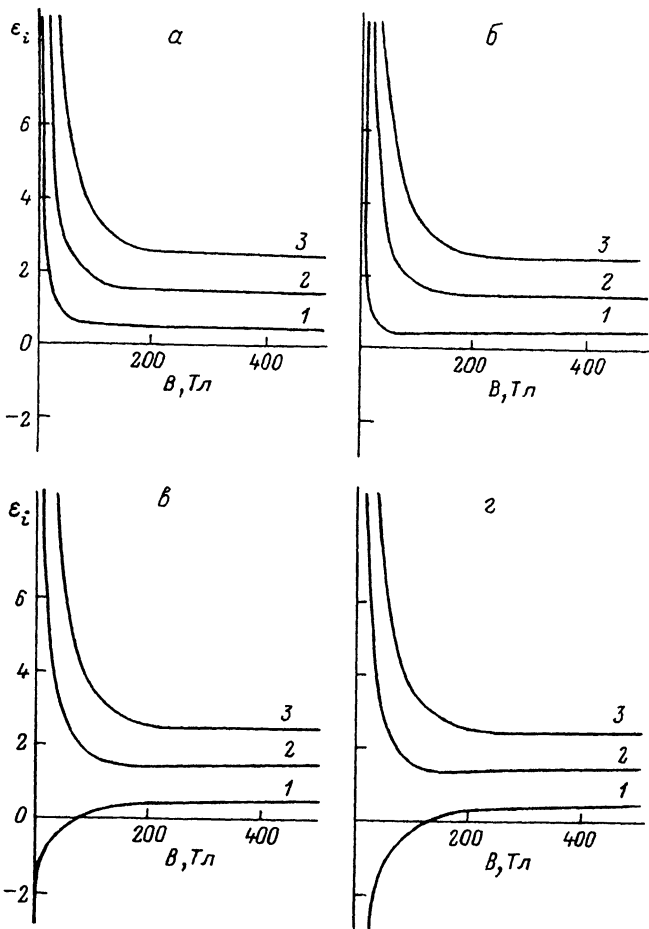


Рис. 2. Зависимость  $\varepsilon = (E_i - 0.5 \text{ эВ}) / \hbar\omega_B$  от  $B$ .

1 — основное состояние, 2 — первый возбужденный уровень, 3 — второй возбужденный уровень.  $U=0$  (а), 0.4 (б), 0.8 (в), 1.2 В (г).

причине в сильных магнитных полях относительное изменение энергии с увеличением  $U$  меньше, чем при малых  $B$ . Так, при  $B=0$  отношение энергий нижнего уровня при  $U=1.2$  В и  $U=0$  равно 8.41, а при  $B=500$  Тл<sup>3</sup> оно составляет 2.36.

На рис. 4, 5 изображена зависимость нормированной поляризации  $P$  (в единицах  $ea/2$ ) от  $U$  и  $B$  для основного состояния. При фиксированных  $B$  поляризация монотонно возрастает с ростом  $F$ , однако включение магнитного поля и его увеличение делают эту зависимость более пологой. В сильных магнитных полях  $P$  мало зависит от напряженности  $F$  и близко к нулю.

Поляризация  $P$  двух первых возбужденных уровней приведена на рис. 6, 7. Поляризация как функция индукции магнитного поля имеет резкий

<sup>3</sup> Современная технология пока не позволяет достигать таких высоких индукций магнитного поля. Кроме того, в столь сильных полях применимость метода эффективной массы может оказаться под сомнением [22, 23]. Однако в данной работе мы отвлекаемся от этих вопросов.

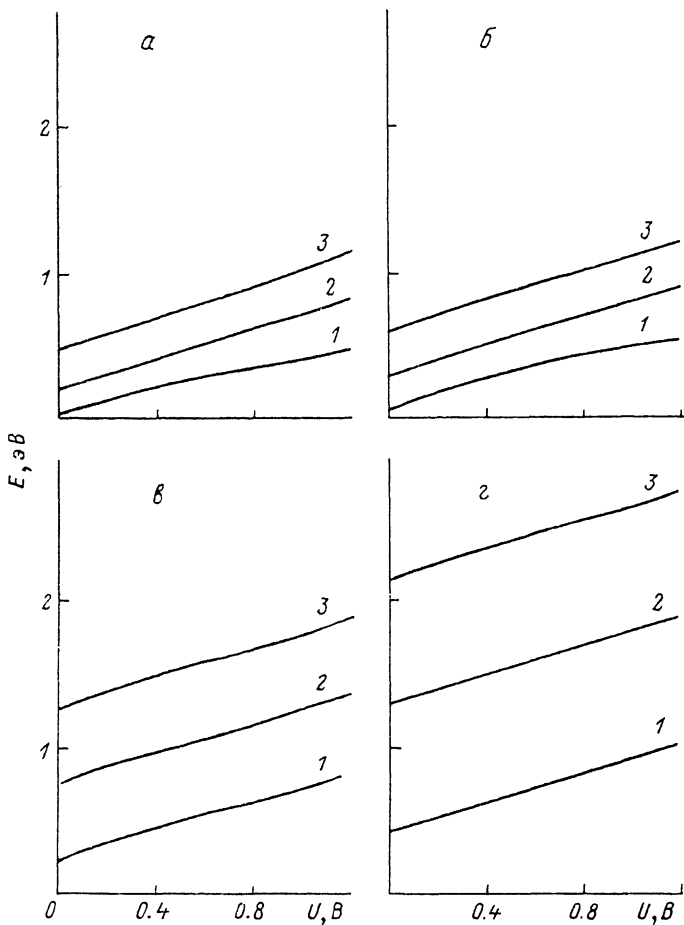


Рис. 3. Зависимость  $E_j$  от напряжения  $U$ .

Обозначения те же, что и на рис. 2.  $B=0$  (а), 100 (б), 300 (в), 500 Тл (г).

максимум. Для вышележащих уровней резонанс достигается при больших  $B$ . В исследуемом диапазоне значений  $F$  от 0 до  $1.2 \cdot 10^8$  В/м положение максимумов поляризации практически не зависит от напряжения  $U$ : резонанс достигается при одном и том же  $B_{res}$  для первого возбужденного уровня,  $B_{res} \approx 180$  Тл; для второго  $B_{res} \approx 270$  Тл. Величина же максимума поляризации возрастает с увеличением  $F$ . В сильных магнитных полях значения поляризаций возбужденных уровней сближаются (при этом они мало отличаются и от поляризации основного состояния — отличие тем больше, чем выше номер уровня) и монотонно стремятся к нулю с ростом  $B$ .

Таким образом, подтверждается сделанный в [15] вывод о том, что совместное воздействие электрического и магнитного полей на квантово-размерные объекты позволяет в широком интервале менять их свойства, переходя от электрического квантования к магнитному, и наоборот.

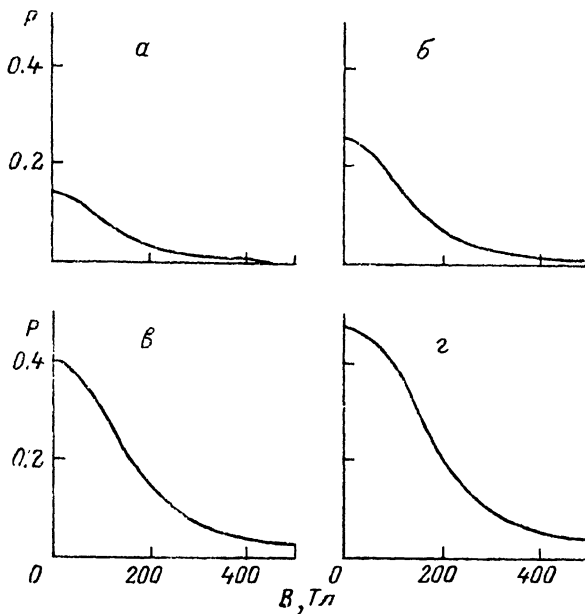


Рис. 4. Поляризация  $P$  основного уровня как функция  $B$ .  
 $U=0.2$  (*а*),  $0.4$  (*б*),  $0.8$  (*в*),  $1.2$  В (*г*).

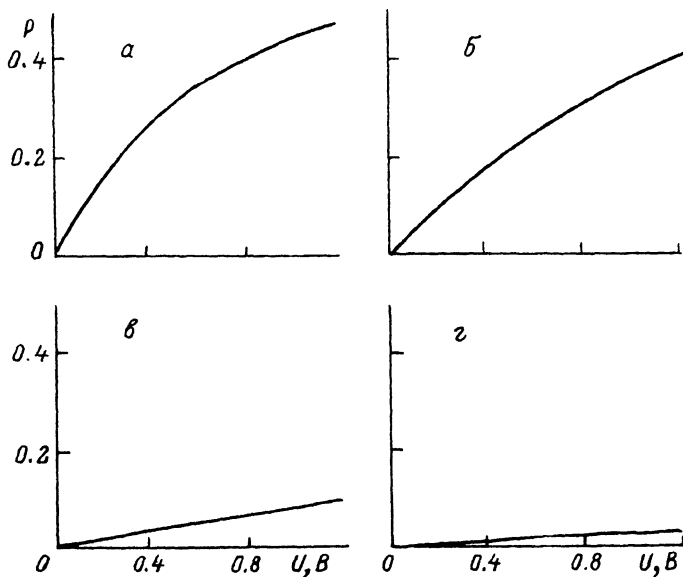


Рис. 5. Поляризация  $P$  основного уровня как функция напряжения  $U$ .  
 $B=0$  (*а*),  $100$  (*б*),  $300$  (*в*),  $500$  Тл (*г*).

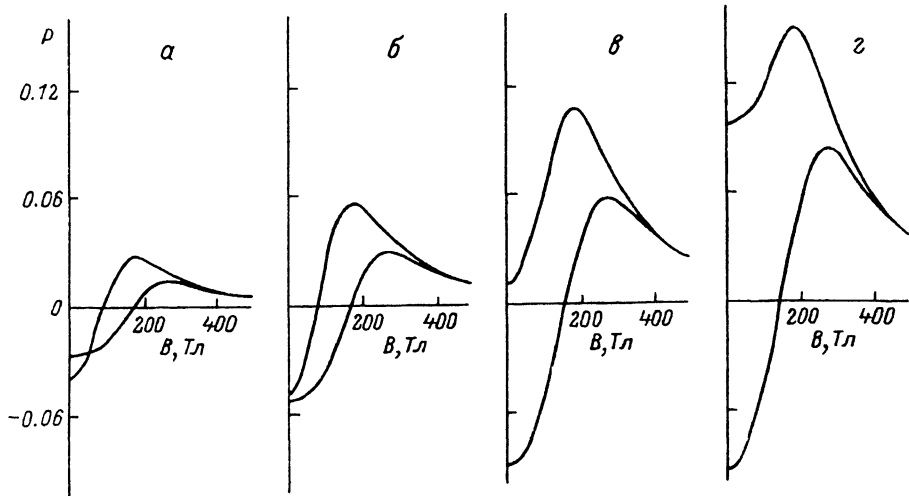


Рис. 6. Поляризация  $P$  возбужденных уровней как функция  $B$ .

1 — первый возбужденный уровень, 2 — второй возбужденный уровень.  $U=0.2$  (а), 0.4 (б), 0.8 (в), 1.2 В (г).

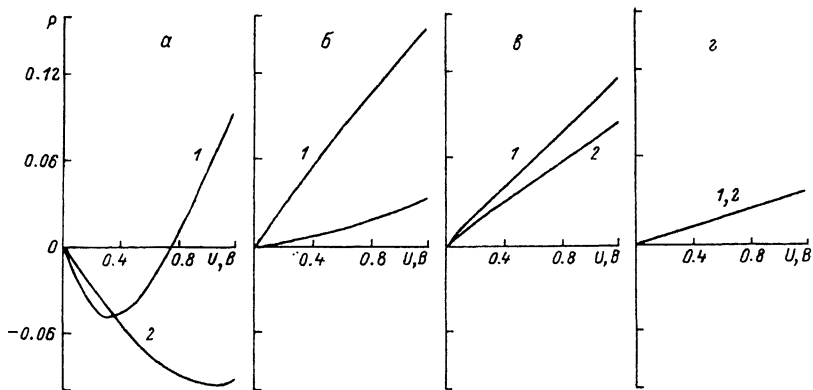


Рис. 7. Поляризация  $P$  возбужденных уровней как функция напряжения  $U$ .

Обозначения те же, что и на рис. 6.  $B=0$  (а), 180 (б), 270 (в), 500 Тл (г).

### Список литературы

- [1] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989. С. 768.
- [2] Bastard G., Mendez E. E., Chand L. L., Esaki L. // Phys. Rev. B. 1983. V. 28. N 6. P. 3241—3245.
- [3] Austin E. J., Jaros M. // Appl. Phys. Lett. 1985. V. 47. N 3. P. 274—276.
- [4] Singh J. // Appl. Phys. Lett. 1986. V. 48. N 6. P. 434—436.
- [5] Churchill J. N., Holmstrom F. E. // Amer. J. Phys. 1987. V. 55. N 4. P. 372—374.
- [6] Miller D. A. B., Chemla D. S., Damen T. C., Gossard A. C., Wiegmann W., Wood T. H., Burrus C. A. // Phys. Rev. B. V. 32. N 2. P. 1043—1060.
- [7] Bloss W. L. // J. Appl. Phys. 1989. V. 65. N 12. P. 4789—4794.
- [8] Wang X., Liang X. X., Chang K. // Solid State Commun. 1988. V. 65. N 1. P. 83—85.
- [9] Sukumar B., Navaneethakrishnan K. // Solid State Commun. 1988. V. 71. N 8. P. 681—683.
- [10] Nguyen D., Odagaki T. // Amer. J. Phys. 1987. V. 55. N 5. P. 466—469.
- [11] Puri A., Sun J. G., Odagaki T. // Solid State Commun. 1989. V. 70. N 9. P. 907—910.
- [12] Miller D. A. B., Chemla D. S., Damen T. C., Gossard A. C., Wiegman W. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. N 22. P. 2173—2176.



- [13] Ilaiwi K. F., Tomak M. // *Solid State Commun.* 1991. V. 78. N 11. P. 1007—1009.
- [14] Miller D. A. B., Chemla D. S., Schmitt-Rink S. // *Phys. Rev. B.* 1986. V. 33. N 10. P. 6976—6982.
- [15] Zawadzki W. // *Semicond. Sci. Technol.* 1987. V. 2 N 8. P. 550—553.
- [16] Олендский О. З. // *Вестник АН Белоруссии. Сер. физ.-мат. наук.* 1992 (в печати).
- [17] Ilaiwi K. F., Tomak M. // *Phys. Stat. Sol. (b).* 1991. V. 166. N 2. P. 409—413.
- [18] Маршалл Т. *Лазеры на свободных электронах.* М.: Мир. 1987. С. 240.
- [19] *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 832.
- [20] Миллер Дж. Ч. П. *Таблицы функций Вебера (функций параболического цилиндра).* М., 1968. СХVI. С. 143.
- [21] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы.* М.: Наука, 1986. С. 800.
- [22] Luttinger J. M., Kohn W. // *Phys. Rev.* 1955. V. 97. N 4. P. 869—883.
- [23] Zak J., Zawadzki W. // *Phys. Rev.* 1966. V. 145. N 2. P. 536—542.

Белорусский государственный университет  
Минск

Поступило в Редакцию  
13 февраля 1992 г.  
В окончательной редакции  
27 апреля 1992 г.