УДК 621.315.592

© 1992

КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ КОНТИНУАЛЬНОГО ПОЛЯРОНА СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ВБЛИЗИ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФАЗ

В. К. Мухоморов

Установлены условия, при которых электростатические силы изображения на границе раздела диэлектрических фаз приводят к фиксации полярона в пространстве. Используя метод коллективных координат Боголюбова—Тябликова выведены уравнения, описывающие осцилляции центра инерции полярона около положения равновесия. Приведены ограничения сверху и снизу, накладываемые на ширину щели фазы нахождения полярона, при которой осцилляции не разрушаются. Рассмотрено дальнодействующее резонансное взаимодействие двух осцилляторов, приводящее к появлению эффективного притяжения поляронов. Приведены численные оценки на примере расчета состояний полярона в аммиаке.

1. Известно [1, 2], что на заряд, помещенный вблизи границы раздела диэлектрических фаз, действуют электростатические силы изображения, направленные по нормали к плоскости раздела. В зависимости от величины отношения диэлектрических проницаемостей смежных фаз заряд будет либо отталкиваться от границы, либо притягиваться. В настоящей работе обсуждается ситуация, когда электрон помещен в макроскопический слой [1] толщиной $2h$ конденсированной фазы с диэлектрической проницаемостью ε_0 между двумя плоскопараллельными бесконечно протяженными однородными диэлектриками (статические диэлектрические проницаемости которых ε_1 и ε_2) толщиной $H \gg 2h$.

Для дальнейшего понадобится электростатический потенциал, создаваемый единичным зарядом в смежных фазах 1 и 2. Воспользуемся для этого методом изображений. Зная значения потенциалов в различных точках пространства, занятого диэлектрическими средами, можно определить условия, при которых заряд фиксируется на некотором равновесном расстоянии от границ раздела.

Выберем начало системы координат на равном расстоянии h от поверхностей массивных диэлектриков, направив ось z перпендикулярно плоскостям границ раздела. Электростатические потенциалы Φ_i во всех трех средах можно найти, решая уравнение Пуассона для однородных изотропных диэлектриков со следующими граничными условиями на поверхностях раздела сред с разными диэлектрическими проницаемостями:

$$\Phi_1 = \Phi_0 \,|_{z=-h}, \quad \Phi_2 = \Phi_0 \,|_{z=h},$$
$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\Big|_{z=-h}, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\Big|_{z=h}. \tag{1}$$

[1] Слой считается макроскопическим в том смысле, что его толщина $2h \gg R_p - 10\ a_0^*$ — характерного размера континуального полярона; $a_0^* = \hbar^2\varepsilon^*/e^2m^*$ — эффективный боровский радиус.

Индексы 1 и 2 относятся к смежным фазам, 0 — к фазе нахождения электрона. Пользуясь методом изображений [1, 2], находим в общем виде для электростатического потенциала Φ_0 следующее выражение:

$$\Phi_0 = -\frac{q}{\varepsilon_0\,[x^2+y^2+(z+a)^2]^{1/2}} - \\ -\frac{q_1^{(1)}}{\varepsilon_0}\sum_{j=0}^{n}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z-a+2h+4jh)^2]^{1/2}} - \right. \\ \left. -\frac{1}{[x^2+y^2+(z+a+4h+4jh)^2]^{1/2}}\right\} - \\ -\frac{q_2^{(1)}}{\varepsilon_0}\sum_{j=0}^{n}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z-a-2h-4jh)^2]^{1/2}} - \right. \\ \left. -\frac{1}{[x^2+y^2+(z+a-4h-4jh)^2]^{1/2}}\right\}, \tag{2}$$

где $q \equiv |e|$, $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ — заряды изображений на фазах 1 и 2 соответственно, a — координата электрона по оси z. Выполняя суммирование в (2) и полагая, что $n \to \infty$, окончательно находим для потенциала в фазе 0

$$\Phi_0 = -\frac{q}{\varepsilon_0\,[x^2+y^2+(z+a)^2]^{1/2}} + \Phi_0^{(1)} + \Phi_0^{(2)},$$

$$\Phi_0^{(1)} = -\frac{q_1^{(1)}}{\varepsilon_0}\left\{\frac{2}{[x^2+y^2+(z-a+2h)^2]^{1/2}} - \right. \\ -\frac{[x^2+y^2+(z-a+2h)^2]^{1/2}}{8h^2} + \\ +\frac{[x^2+y^2+(z+a+4h)^2]^{1/2}}{8h^2} - \\ \left. -\frac{2}{[x^2+y^2+(z+a+4h)^2]^{1/2}}\right\},$$

$$\Phi_0^{(2)} = -\frac{q_2^{(1)}}{\varepsilon_0}\left\{\frac{[x^2+y^2+(z+a-4h)^2]^{1/2}}{8h^2} - \right. \\ -\frac{2}{[x^2+y^2+(z+a-4h)^2]^{1/2}} + \\ \left. +\frac{2}{[x^2+y^2+(z-a-2h)^2]^{1/2}} - \frac{[x^2+y^2+(z-a-2h)^2]^{1/2}}{8h^2}\right\}. \tag{3}$$

В соответствии с методом изображений запишем также электростатические потенциалы Φ_1 и Φ_2 в бесконечно протяженных средах 1 и 2 следующим образом:

$$\Phi_1 = \frac{q_1^{(2)}}{\varepsilon_1\,[x^2+y^2+(z+a)^2]^{1/2}},$$

$$\Phi_2 = \frac{q_2^{(2)}}{\varepsilon_2\,[x^2+y^2+(z+a)^2]^{1/2}}. \tag{4}$$

Здесь необходимо сделать замечание. В том случае, если волновая функция электрона распространяется через границу раздела фаз, то потенциалы (2)—(4)

не могут быть использованы из-за возникающей сингулярности на границах раздела. Однако в рассматриваемом случае $h \gg R_p$ эти потенциалы являются достаточно хорошим приближением.

Фиктивные заряды изображения $q_1^{(1)}$, $q_2^{(1)}$, $q_1^{(2)}$ и $q_2^{(2)}$ определяются из граничных условий (1). В дальнейшем понадобятся только заряды $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$, которые можно записать следующим образом:

$$q_1^{(1)} = -q \frac{\left[\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)\left(\delta_2+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\gamma_2\right)-\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\right)\left(\beta_2+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\alpha_2\right)\right]}{\left[\left(\beta_2+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\alpha_2\right)\left(\delta_1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\gamma_1\right)-\left(\beta_1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\alpha_1\right)\left(\delta_2+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\gamma_2\right)\right]},$$

$$q_2^{(1)} = -q \frac{\left[\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)\left(\delta_1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\gamma_1\right)-\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\right)\left(\beta_1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\alpha_1\right)\right]}{\left[\left(\delta_2+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\gamma_2\right)\left(\beta_1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\alpha_1\right)-\left(\beta_2+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\alpha_2\right)\left(\delta_1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\gamma_1\right)\right]}, \tag{5}$$

где использованы обозначения

$$\alpha_1 = (a-h)\left[\frac{2}{h-a}+\frac{a+h}{4h^2}-\frac{2}{3h-a}\right],$$

$$\alpha_2 = (a-h)\left[\frac{a-h}{4h^2}-\frac{2}{a-5h}-\frac{2}{a+3h}\right],$$

$$\beta_1 = (a-h)^2\left[\frac{2}{(a+3h)^2}-\frac{2}{(h-a)^2}\right],$$

$$\beta_2 = (a-h)^2\left[\frac{2}{(a-5h)^2}-\frac{2}{(a+3h)^2}\right],$$

$$\gamma_1 = (a+h)\left[\frac{2}{3h-a}+\frac{h+a}{4h^2}-\frac{2}{a+5h}\right],$$

$$\gamma_2 = (a+h)\left[-\frac{2}{a-3h}+\frac{a-h}{4h^2}-\frac{2}{a+h}\right],$$

$$\delta_1 = (a+h)^2\left[-\frac{2}{(3h-a)^2}+\frac{2}{(5h+a)^2}\right],$$

$$\delta_2 = (a+h)^2\left[\frac{2}{(a-3h)^2}-\frac{2}{(a+h)^2}\right]. \tag{6}$$

В зависимости от величины отношений $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ и $\varepsilon_2/\varepsilon_0$ заряды изображений $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ будут либо отрицательными, либо положительными. В том случае, когда $q_1^{(1)} < 0$ и $q_2^{(1)} < 0$, электростатические силы, действующие на электрон, будут направлены в глубь фазы 0, т. е. электрон отталкивается от границ раздела диэлектрических фаз 1—0 и 2—0 и тем самым становится возможна его фиксация в области фазы 0 на некотором равновесном расстоянии a по оси z, которое может быть определено из экстремальных свойств электростатической энергии взаимодействия электрона с зарядами $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$.

2. Перейдем к рассмотрению движения электрона в поляризующейся среде с учетом действия сил изображения. Для описания состояний дополнительного электрона воспользуемся изотропной континуальной моделью автолокализации, учитывающей взаимодействие электрона с бездисперсионными продольными оптическими фононами в приближении сильной связи. Запишем гамильтониан электрона, связанного со скалярным полем фононов в приближении эффективной массы, следующим образом:

$$H = \frac{p^2}{2m^*} + \sum_{\mathbf{f}} [V_{\mathbf{f}}\, b_{\mathbf{f}} \exp(i\mathbf{fr}) + V_{\mathbf{f}}^+\, b_{\mathbf{f}}^+ \exp(-i\mathbf{fr})] +$$

$$+ \sum_{\mathbf{f}} \hbar\omega_0 b_{\mathbf{f}}^+ b_{\mathbf{f}} + \sum_{l=1,2} e\Phi_0^{(l)}(\mathbf{r}). \qquad (7)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона; $\mathbf{p}$ — его импульс; $e = -|e|$; m^* — изотропная эффективная масса электрона; ω_0 — предельная ($f = 0$) частота продольной ветви оптических фононов; $V_{\mathbf{f}} = -(i\hbar\omega_0/f)(\hbar/2m^*\omega_0)^{1/4}(4\pi\alpha_c/V_0)^{1/2}$ — Фурье-коэффициенты взаимодействия электрона с длинноволновыми фононами; $\alpha_c = (e^2/2\varepsilon^*\hbar\omega_0)(2m^*\omega_0/\hbar)^{1/2}$ — безразмерная константа связи; $\varepsilon^{*-1} = \varepsilon_0^{\infty\,-1} - \varepsilon_0^{-1}$ — эффективная диэлектрическая проницаемость среды; ε_0^{∞} — высокочастотная диэлектрическая проницаемость фазы 0; V_0 — объем однородного и изотропного диэлектрического континуума. Квантовые амплитуды скалярного поля $b_{\mathbf{f}}$ и $b_{\mathbf{f}}^+$ удовлетворяют соотношениям коммутации для Бозе-амплитуд $[b_{\mathbf{f}}, b_{\mathbf{f}'}^+] = \delta_{\mathbf{ff}'}$, $[b_{\mathbf{f}}, b_{\mathbf{f}'}] = [b_{\mathbf{f}}^+, b_{\mathbf{f}'}^+] = 0$.

В дальнейшем при анализе гамильтониана (7) воспользуемся адиабатической теорией возмущений Боголюбова—Тябликова [3, 4], в которой за малую величину принимают кинетическую энергию фононного поля. Следуя [3, 4], с помощью соотношения $\hbar\omega_0 = \xi\nu_0$ введем безразмерный малый параметр $\xi \ll 1$. Этот подход позволяет последовательно разложить в ряд гамильтониан (7) по степеням параметра ξ.

Перейдем от бозевских операторов $b_{\mathbf{f}}$ и $b_{\mathbf{f}}^+$ к комплексным операторам координат f-го осциллятора поля и канонически сопряженным импульсам согласно соотношениям

$$q_{\mathbf{f}} = \frac{\xi}{\sqrt{2}}(b_{\mathbf{f}} + b_{-\mathbf{f}}^+),$$

$$p_{\mathbf{f}} = -i\frac{\partial}{\partial q_{\mathbf{f}}} = \frac{i}{\xi\sqrt{2}}(b_{\mathbf{f}}^+ - b_{-\mathbf{f}}), \qquad (8)$$

удовлетворяющим перестановочным соотношениям $[q_{\mathbf{f}}, p_{\mathbf{f}}] = i\delta_{\mathbf{ff}'}$. В обозначениях (8) энергия свободного фононного поля разделяется на кинетическую и потенциальную энергии осцилляторов поля. Используя (8), перепишем гамильтониан (7) следующим образом:

$$H = \frac{p^2}{2m^*} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\mathbf{f}} q_{\mathbf{f}}(W_{\mathbf{f}} + W_{-\mathbf{f}}^*)\exp(i\,\mathbf{fr}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{f}} \nu_0 q_{\mathbf{f}} q_{-\mathbf{f}} +$$

$$+ \sum_{l=1,2} e\Phi_0^{(l)}(\mathbf{r}) + \frac{\xi^4}{2}\sum_{\mathbf{f}} \nu_0 p_{\mathbf{f}}\, p_{-\mathbf{f}},$$

$$W_{\mathbf{f}} = -\frac{ie}{f}\xi\sqrt{\frac{4\pi\nu_0}{\varepsilon^* V_0}}. \qquad (9)$$

Воспользуемся каноническим преобразованием координат [3, 4], которое позволяет представить радиус-вектор r электрона в виде двух составляющих: внутренней трансляционно-инвариантной переменной $\boldsymbol{\rho}$ и переменной $\mathbf{R}$, отвечающей за движение системы как целое

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}, \quad q_f = (u_f + \xi Q_f) \exp (i \, \mathbf{f}\mathbf{R}). \tag{10}$$

Здесь Q_f — новые операторы координаты f-го осциллятора поля, описывающие его малые квантовые флуктуации вблизи классического значения u_f. Чтобы полное число независимых динамических переменных в системе сохранилось, на новые координаты фононного поля Q_f накладываются три дополнительных условия связи

$$\sum_f \mathbf{f} v_f^* Q_f = 0. \tag{11}$$

Преобразование координат (10) позволяет развить теорию возмущений по параметру ξ.

Вспомогательные функции u_f и v_f выбираются таким образом, чтобы удовлетворялись условия ортогональности и вещественности

$$\sum_f f_\alpha f_\beta u_f v_f^* = \delta_{\alpha\beta},$$

$$v_f^* = v_{-f}, \quad u_f^* = u_{-f}. \tag{12}$$

Учитывая определение (10), а также соотношения для производных

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}},$$

$$\frac{\partial}{\partial q_f} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial q_f} \frac{\partial}{\partial Q_{\mathbf{k}}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}, \tag{13}$$

гамильтониан (9) в новых переменных представим в виде ряда по степеням ξ

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m^*} + \sum_f \frac{1}{\sqrt{2}} (W_f + W_{-f}^*) \, u_f \exp (i\mathbf{f}\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{2} \sum_f \nu_0 u_f u_{-f} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_f \nu_0 v_f^* v_{-f}^* \, \mathbf{f}\mathbf{f} \frac{\partial^2}{\partial I^2} + U (z = 0) + \frac{1}{2} U'' (z = o) \, z^2 + \ldots +$$

$$+ \xi \left\{ \sum_f \frac{1}{\sqrt{2}} (W_f + W_{-f}^*) \, Q_f \exp (i\mathbf{f}\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{2} \sum_f (Q_f u_{-f} + u_f Q_{-f}) \, \nu_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_f \nu_0 \, [v_f^* \mathbf{f} p'_{-f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} - v_{-f}^* p'_f \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}}] \right\} + \frac{\xi^2}{2} \sum_f \nu_0 \, (Q_f Q_{-f} + p'_f p'_{-f}) + \ldots =$$

$$= H_0 + \xi H_1 + \xi^2 H_2 + \ldots . \tag{14}$$

Здесь использовано обозначение: $\partial / \partial \mathbf{I} = \xi^2 \partial / \partial \mathbf{R}$ и $p'_f = -i\partial / \partial Q_f$ —

$-\sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathfrak{f}} \mathbf{f}\mathbf{k}\, (-i\partial/\partial Q_{\mathbf{k}})$, а также учтено, что для принятой толщины слоя h энергия взаимодействия $U = \sum_{i=1,2} e\Phi_0^{(i)}$ электрона с электростатическими силами изображения является величиной малой и может быть разложена в ряд Тейлора около $z = 0$. Условие $U'\ (z = 0) = 0$ позволяет найти величину параметра смещения a.

Следуя [4], неопределенные комплексные величины $\nu_{\mathfrak{f}}$ найдем, представив $p_{\mathfrak{f}}$ в виде суммы $p_{\mathfrak{f}} = \pi_{\mathfrak{f}} + a_{\mathfrak{f}}$. Потребуем, чтобы входящие в H_1 члены линейные по $\pi_{\mathfrak{f}}$ исчезли. Тогда условие равенства нулю коэффициентов при $\pi_{\mathfrak{f}}$ принимает следующий вид:

$$\nu_0 \left[a_{\mathfrak{f}}' - i\nu_{\mathfrak{f}} \left(\mathbf{f}\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}}\right)\right] - u_{\mathfrak{f}} \sum_{\mathbf{k}} \nu_{\mathbf{k}}^{*} \mathbf{k}\mathbf{f} \nu_0 \left[a_{-\mathbf{k}}' - i\nu_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{f}\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}}\right)\right] = 0, \tag{15}$$

где

$$a_{\mathbf{k}}' = a_{\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{k}} \sum_{\mathfrak{f}} (\mathbf{k}\mathbf{f})\, u_{\mathfrak{f}} a_{\mathfrak{f}}.$$

Пользуясь свободой выбора $a_{\mathbf{k}}$, потребуем, чтобы $a_{\mathbf{k}} = 0$. Тогда (15) принимает вид

$$\nu_0 \nu_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{\hbar}\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}}\right) - u_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}} \nu_{\mathfrak{f}}^{*} (\mathbf{k}\mathbf{f})\, \nu_0 \nu_{\mathfrak{f}} \left(\mathbf{f}\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}}\right) = 0. \tag{16}$$

При учете условия ортогональности (12) уравнение (16) удовлетворится, если положить

$$\nu_0 \nu_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}}\right) = \hbar^2 (\mathbf{k}\mathbf{V})\, u_{\mathbf{k}}\,, \tag{17}$$

где V — оператор вектора скорости. Отсюда находим $\nu_{\mathbf{k}}$

$$\nu_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} = \frac{1}{m_{\alpha}^{**}} \frac{u_{\mathbf{k}}}{\nu_0}, \quad \alpha = x, y, z, \tag{18}$$

где

$$m_{\alpha}^{**} = \sum_{\mathfrak{f}} \hbar^2\, |\, f_{\alpha}\,|^2\, |\, u_{\mathfrak{f}}\,|^2 / \nu_0 \xi^2$$

— компонента эффективной массы полярона в α-м направлении.

Волновое уравнение с гамильтонианом (14) можно решать методом теории возмущений. Для этого запишем полную волновую функцию в виде ряда

$$\Psi = \Psi_0 + \xi\Psi_1 + \xi^2\Psi_2 + \ldots \tag{19}$$

и соответственно полную энергию

$$E = E_0 + \xi E_1 + \xi^2 E_2 + \ldots. \tag{20}$$

Тогда уравнение $(H - E)\Psi = 0$ сводится к бесконечной системе уравнений

$$(H_0 - E_0)\Psi_0 = 0, \tag{21}$$

$$(H_0 - E_0)\Psi_1 = (E_1 - H_1)\Psi_0, \tag{22}$$

$$(H_0 - E_0)\Psi_2 = (E_2 - H_2)\Psi_0 + (E_1 - H_1)\Psi_1 \ldots . \tag{23}$$

Главным членом разложения (14), несущим нетривиальную информацию о системе, является H_0. Поскольку оператор H_0 действует только на переменные $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{R}$ и не включает в себя полевых переменных $Q_{\mathfrak{f}}$, то полную волновую функцию нулевого приближения аппроксимируем мультипликативной формой (адиабатическое приближение)

$$\Psi_0 = \psi(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R})\, \Phi_0(\ldots Q_{\mathfrak{f}} \ldots). \tag{24}$$

Здесь $\Phi_0(\ldots Q_{\mathfrak{f}} \ldots)$ — некоторая функция переменных $Q_{\mathfrak{f}}$, а $\psi(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R})$ удовлетворяет уравнению

$$\Big\{ -\frac{\hbar^2}{2m_*}\nabla_\rho^2 + \sum_{\mathfrak{f}} \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mathfrak{f}} + W^*_{-\mathfrak{f}})\, u_{\mathfrak{f}} \exp(i\mathfrak{f}\boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{f}} \nu_0 v_{\mathfrak{f}}^* v^*_{-\mathfrak{f}}\, \mathrm{ff}\, \frac{\partial^2}{\partial I^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} U''(z=0)(R_z + \rho_z)^2 - W_0 \Big\} \psi(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}) = 0,$$

$$W_0 = E_0 - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{f}} \nu_0 u_{\mathfrak{f}} u_{-\mathfrak{f}} - U(z=0). \tag{25}$$

Принимая во внимание определение функции $v_{\mathfrak{f}}$ (18), перепишем уравнение (25) следующим образом:

$$[H(\boldsymbol{\rho}) + H(\mathbf{R}) + V(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R})]\, \psi(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}) = w_0 \psi(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}) = w_0 \psi(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}),$$

$$H(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{\hbar^2}{2m_*}\nabla_\rho^2 + \sum_{\mathfrak{f}} \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mathfrak{f}} + W^*_{-\mathfrak{f}})\, u_{\mathfrak{f}} \exp(i\mathfrak{f}\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{2} U''(z=0)\rho_z^2,$$

$$H(\mathbf{R}) = -\sum_{\alpha = x, y, z} \frac{\hbar^2}{2m_\alpha^{**}} \frac{\partial^2}{\partial R_\alpha^2} + \frac{1}{2} U''(z=0) R_z^2,$$

$$V(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}) = U''(z=0) R_z \rho_z . \tag{26}$$

3. Ниже будет показано, что действие электростатических сил изображения является слабым возмущением и для основного невырожденного электронного состояния оператором $V(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R})$, описывающим взаимодействие двух подсистем, можно пренебречь. В этом случае полную систему, зависящую от координат $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{R}$, можно разделить на две консервативные подсистемы, одна из которых зависит от переменной $\boldsymbol{\rho}$, а другая — от $\mathbf{R}$. Тогда полная волновая функция нулевого приближения аппроксимируется произведением волновых функций

$$\Psi_0 = \varphi_0(\boldsymbol{\rho})\,\chi(\mathbf{R})\,\Phi_0(\ldots Q_f\ldots). \tag{27}$$

Дискретный спектр собственных значений и волновые функции $\varphi_n(\boldsymbol{\rho})$ при $n > 0$ оператора $H(\boldsymbol{\rho})$ без учета сил изображения подробно описан в [5].

Учитывая, что $H(\mathbf{R})$ в (26) коммутируют с компонентами импульса P_{R_x} и P_{R_y}, собственные функции гамильтониана $H(\mathbf{R})$ можно представить в виде произведения

$$\chi(\mathbf{R}) = \chi(R_z)\,\chi(R_x, R_y), \tag{28}$$

где $\chi(R_x, R_y)$ описывает свободное движение полярона в плоскости xy.

Пусть E_0 и $\varphi_0(\boldsymbol{\rho})$ — энергия и волновая функция основного невырожденного дискретного уровня уравнения (22), при этом, очевидно, выполняется равенство

$$(H_0 - E_0)\,\Psi_1 = 0. \tag{29}$$

Принимая во внимание это равенство, из (22) следует, что

$$\langle\varphi_0 \mid H_1 - E_1 \mid \varphi_0\rangle = 0. \tag{30}$$

Усредненный по волновой функции φ_0 оператор H_1 является линейной формой по Q_f и p_f', поэтому уравнение $[\langle\varphi_0 \mid H_1 \mid \varphi_0\rangle - E_1]\,\Phi_0(\ldots Q_f\ldots) = 0$ не может иметь регулярного решения, если этот оператор не является тождественно нулем. Выберем функции u_k, входящие в оператор H_1 так, чтобы выполнялось равенство

$$\langle\varphi_0 \mid H_1 \mid \varphi_0\rangle = 0. \tag{31}$$

Учитывая в (14) определение H_1, находим неизвестные функции u_f

$$u_{-f} = u_f^* = -\frac{\sqrt{2}}{\nu_0}\,(W_f + W_{-f}^*)\,\langle\varphi_0(\boldsymbol{\rho}) \mid \exp(i\mathbf{f}\boldsymbol{\rho}) \mid \varphi_0(\boldsymbol{\rho})\rangle. \tag{32}$$

Уравнение (32) также можно получить варьированием функционала $F = \langle\varphi_0(\rho) \mid H_0 \mid \varphi_0(\rho)\rangle$ по u_f при дополнительном условии $\langle\varphi_0 \mid \varphi_0\rangle = 1$. Подставляя (32) в (26) и выписывая явно выражения для $U(z=0)$ и ее второй производной, представим гамильтониан нулевого приближения в следующем виде:

$$\Bigg\{-\frac{\hbar^2}{2m_*}\nabla_\rho^2 - \sum_f \frac{|W_f + W_{-f}|^2}{\nu_0}\langle\varphi_0 \mid \exp(i\mathbf{f}\boldsymbol{\rho}) \mid \varphi_0\rangle \exp(i\mathbf{f}\boldsymbol{\rho}) - \\ - \frac{7q_1^{(1)}e}{16\varepsilon_0 h^3}\rho_z^2 - W_0\Bigg\}\,\varphi_0(\boldsymbol{\rho}) = 0, \tag{33}$$

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_z^{**}}\frac{d^2}{dR_z^2} - \frac{7eq_1^{(1)}}{16\varepsilon_0 h^3}R_z^2\right\}\chi_n(R_z) = \varepsilon_n\,\chi_n(R_z). \tag{34}$$

Уравнение Шредингера для свободного движения в плоскости xy не представляет интереса и поэтому не приводится. Таким образом, если говорить о системе электронов, то они образуют двумерную энергетическую зону с континуумом трансляционных состояний в плоскости, параллельной поверхности.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением симметричного случая, когда диэлектрические проницаемости обкладок $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, что, очевидно, приводит к значению $a = 0$. Именно этому случаю соответствует потенциальная энергия в (33) и (34).

Заряды изображений $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ определяются из (5) и (6), и в симметричном случае имеем

$$q_1^{(1)} = q_2^{(1)} = -\frac{75q}{16}\frac{(1-\varepsilon_1/\varepsilon_0)}{(9+5\varepsilon_1/\varepsilon_0)}. \tag{35}$$

Отсюда нетрудно видеть, что $q_1^{(1)} < 0$, если $\varepsilon_0 > \varepsilon_1, \varepsilon_2$, и тем самым возникает отталкивание электрона от границ поверхностей раздела.

Гамильтониан (33) анализировался в случае двумерных $2D$-электронных систем, взаимодействующих с поверхностными фононами для континуальных поляронов в [6, 7] и для малых поляронов сильной связи в [8], где было отмечено, что автолокализация приводит к возникновению связанных состояний.

Проверим, насколько существенно влияние сил изображения на электронные состояния в поляризационной потенциальной яме. Выберем полуширину зазора между диэлектрическими обкладками $h = 150a_0^* \gg R_p$, что не противоречит объемному континуальному приближению. Учитывая существование выделенного направления вдоль оси z, запишем одноэлектронную волновую функцию основного состояния $\varphi_0(\boldsymbol{\rho})$ в виде суперпозиции s и p_z волновых функций

$$\varphi_0(\boldsymbol{\rho}) \sim \varphi_s(\boldsymbol{\rho}) + C\varphi_{p_z}(\boldsymbol{\rho}),$$

$$\varphi_s \sim (1+\alpha\rho)\exp(-\alpha\rho), \quad \varphi_{p_z} \sim \rho_z \exp(-\beta\rho), \tag{36}$$

где аппроксимирующие параметры C, α и β определяются из экстремальных свойств функционала

$$F = -\frac{\hbar^2}{2m_*}\langle\varphi_0 \mid \nabla_\rho^2 \mid \varphi_0\rangle - \frac{7q_1^{(1)}e}{16\varepsilon_0^\infty h^3}\langle\varphi_0 \mid \rho_z^2 \mid \varphi_0\rangle -$$

$$-\sum_{\mathbf{f}} \frac{|W_{\mathbf{f}} + W_{-\mathbf{f}}^*|^2}{\nu_0} |\langle\varphi_0| \exp(i\mathbf{f}\rho)|\varphi_0\rangle|^2 = T - U_2 - U_1, \tag{37}$$

причем в точке минимума должна выполняться теорема вириала

$$2T = U_1 + 2U_2. \tag{38}$$

Принимая во внимание, что в пределе сильной связи $|F| \sim \alpha_c^2\hbar\omega_0 \gg \hbar\omega_0$ и осцилляции электрона на основном электронном уровне в поляризационной потенциальной яме являются быстрыми по сравнению с инерционным движением ионной подсистемы конденсированной фазы, диэлектрические постоянные, которые входят во второе слагаемое (37), а также в определение $q_1^{(1)}$, должны быть заменены их высокочастотными значениями $\varepsilon_0^{(\infty)}$ и $\varepsilon_1^{(\infty)}$. Ниже в оценочных расчетах полагаем для определенности $\varepsilon_0^{(\infty)} \approx \varepsilon_1^{(\infty)} = 2.0$. Минимизируя функционал (37) по φ_0 при дополнительном условии $\langle\varphi_0 \mid \varphi_0\rangle = 1$, находим оптимальные значения вариационных параметров: $\alpha = 0.501/a_0^*$, $\beta = 0.196/a_0^*$ и $C = -10^{-4}$. Таким образом, значение параметра α практически не отличается [9] от его значения для полярона сильной связи в отсутствие действия сил изображения. Малость параметра $|C| \ll 1$ позволяет рассматривать действие электростатических сил как слабое возмущение и тем самым оправдывает принятые приближения в гамильтониане (26).

Уравнение (34), описывающее движение центра инерции полярона в z-направлении, удобно переписать в следующем виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_z^{**}}\frac{d^2\chi_n}{dR_z^2}+\frac{m_z^{**}\Omega^2}{2}R_z^2\chi_n=\varepsilon_n\chi_n,\quad n=0,1,2,\ldots,\tag{39}$$

где собственная частота нормальных колебаний равна

$$\Omega^2=-\frac{7eq_1^{(1)}}{8m_z^{**}\varepsilon_0 h^3}.\tag{40}$$

Тот факт, что m_z^{**} прямо входит в формулу, определяющую частоту осцилляций Ω, позволяет в принципе использовать (40) для прямого экспериментального определения резонансными методами продольной эффективной массы полярона.

Используя волновую функцию (36) с рассчитанными аппроксимирующими параметрами из (18), найдем численное значение эффективной массы полярона в z-направлении

$$m_z^{**}=5.8\cdot 10^{-3}\,(m^*e^2/\varepsilon^*\hbar^2)^3\,(e^2/\varepsilon^*\omega_0^2)=0.023\alpha_c^4 m^*,\tag{41}$$

которое практически совпадает со значением m^{**} для свободного полярона [3, 4]. Учитывая неравенство $m_z^{**}\gg m^*$ из (40), для принятых значений h следует, что $\Omega\ll\omega_0$. В этом случае в (40) для $q_1^{(1)}$ необходимо использовать значения диэлектрических проницаемостей, соответствующих их статическим значениям.

4. Предположим теперь, что в той же плоскости xy на большом расстоянии $R_0 > R_p$ (для определенности считаем, что направление оси, соединяющей поляроны, совпадает с осью x) от выбранного электрона находится еще один полярон в основном невырожденном состоянии. Функционал самосогласованной полной энергии двухэлектронного образования, в котором уже проведено разделение переменных $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{R}$, можно записать следующим образом [10, 11]:

$$\begin{aligned}F\,[\varphi_0(1,2)]=&-\frac{\hbar^2}{2m^*}\sum_{k=1,2}\langle\varphi_0(1,2)\,|\,\nabla^2_{\rho_k}\,|\,\varphi_0(1,2)\rangle-\sum_{\mathbf{f},k=1,2}\frac{|V_{\mathbf{f}}\rho_0^{(k)}(\mathbf{f})|^2}{\hbar\omega_0}+\\&+\frac{e^2}{\varepsilon_0^{(\infty)}}\left\langle\varphi_0(1,2)\,\middle|\,\frac{1}{|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|}\,\middle|\,\varphi_0(1,2)\right\rangle-\\&-\frac{3eq_i^{(1)}}{\varepsilon_0^{(\infty)}h}-\frac{7eq_1^{(1)}}{16\varepsilon_0^{(\infty)}h^3}\langle\varphi_0(1,2)\,|\sum_{k=1,2}\rho_z^2(k)\,|\,\varphi_0(1,2)\rangle+\\&+e_1[\Phi_0^{(1)}(2)+\Phi_0^{(2)}(2)]+e_2\,[\Phi_0^{(1)}(1)+\Phi_0^{(2)}(1)],\end{aligned}\tag{42}$$

где $\varphi_0(1,2)$ — симметризованная двухэлектронная волновая функция, $\rho_0^{(k)}(\mathbf{f})$ — Фурье-преобразование электронного распределения. Третье слагаемое в (42) отвечает прямому межэлектронному взаимодействию, два последних слагаемых в гамильтониане учитывают перекрестное взаимодействие первого электрона e_1 с зарядом изображения второго и второго электрона e_2 с зарядом изображения первого.

Функционал относительного движения двух электронов (42) (первые две строки) был подробно проанализирован с учетом влияния динамических межэлектронных корреляций в [10, 11], где установлено, что полная самосогласованная энергия связанного синглетного двухэлектронного автолокализованного образования имеет минимум на конечном равновесном расстоянии между поляронами $R \simeq 6a_0^*$ (аксиально-симметричный квазимолекулярный димер), максимум (потенциальный барьер) при $R_{\max} \simeq 20a_0^*$ и обладает кулоновской асимптотикой при $R > R_{\max}$. Высота барьера отталкивания поляронов является функцией отношения $\varepsilon^* / \varepsilon_0^{(\infty)}$ и стремится к нулю при $\varepsilon^* / \varepsilon_0^{(\infty)} \to 1$ (т. е. при $\varepsilon_0 \gg \varepsilon_0^{(\infty)}$).

В том случае, если $\varepsilon_0^{(\infty)} < \varepsilon_1^{(\infty)}, \varepsilon_2^{(\infty)}$, как нетрудно видеть из (35), заряды $q_1^{(1)} > 0$ и $q_2^{(1)} > 0$ и два предпоследних слагаемых в (42) дают дополнительное слабое притяжение в полную энергию, приводящее к некоторому снижению высоты барьера. В предельном случае $\varepsilon^* / \varepsilon_0^{(\infty)} \to 1$ даже такое слабое притяжение может привести к увеличению энергии связи двухэлектронного образования.

Значительно больший эффект притяжения поляронов возникает за счет резонансного взаимодействия между двумя осцилляторами (39). В рамках макроскопической электродинамики оператор дальнодействующего взаимодействия в дипольном приближении для двух осцилляторов, помещенных в изотропную однородную диэлектрическую среду, можно записать [12]

$$M = \frac{1}{\varepsilon_0(\Omega) R_0^3} [\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 - 3(\mathbf{D}_1\mathbf{n})(\mathbf{D}_2\mathbf{n})] \left(\frac{\varepsilon_0(\Omega) + 2}{3}\right)^2, \tag{43}$$

где $\mathbf{D}_1 = e\mathbf{R}(1)$ и $\mathbf{D}_2 = e\mathbf{R}(2)$ — операторы дипольного момента первого и второго осцилляторов; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси x; $\varepsilon_0(\Omega)$ — диэлектрическая проницаемость фазы 0 на частоте колебаний осцилляторов, при этом предполагается, что частота не совпадает с резонансами $\varepsilon_0(\Omega)$. Последний сомножитель в (43) учитывает поправки к эффективному значению $\mathbf{D}$ за счет внутреннего поля среды.

Уравнение, описывающее два одномерных гармонических осциллятора (39), связанных взаимодействием (43), относится к классу точно решаемых задач. Используя линейные преобразования $R_+ = R_z(1) + R_z(2)$ и $R_- = R_z(1) - R_z(2)$, одно уравнение связанных осцилляторов можно свести к двум уравнениям несвязанных гармонических осцилляторов, но с новыми собственными частотами

$$H_{\text{осц}}\chi_n^{\pm} = \frac{1}{4m_z^{**}} \frac{d^2\chi_n^{\pm}}{dR_{\pm}^2} + \frac{1}{4} m_z^{**}\Omega_{\pm}^2 R_{\pm}^2 \chi_n^{\pm} = \varepsilon_n^{\pm}\chi_n^{\pm}, \tag{44}$$

где поляризованные вдоль вектора $\mathbf{n}$ собственные частоты колебаний равны

$$\Omega_{\pm} = \Omega(1 \pm \delta)^{1/2},$$

$$\delta = \frac{e^2}{m_z^{**}\Omega^2 \varepsilon_0(\Omega) R_0^3} \left(\frac{\varepsilon_0(\Omega) + 2}{3}\right)^2.$$

Изменение полной энергии в результате взаимодействия двух осцилляторов равно

$$\Delta F = \langle\varepsilon^+\rangle + \langle\varepsilon^-\rangle - 2\langle\varepsilon_0\rangle. \tag{45}$$

Здесь $\langle\varepsilon\rangle = \mathrm{Sp}(\rho\varepsilon) = (\hbar\Omega/2)\,\mathrm{cth}(\hbar\Omega/2kT)$ — статистическое среднее энергии осциллятора; $\rho = \exp(-H_{\text{осц}}/kT)/Z$ — матрица плотности гармонического осциллятора, находящегося в термодинамическом равновесии с тепловым резервуаром при температуре T; $Z = \mathrm{Sp}[\exp(-H_{\text{осц}}/kT)]$ — статистическая сумма.

Пороговая температура, при которой осцилляции полярона около фиксированного положения в пространстве фазы 0 не разрушаются, определяется из условия выполнения требования $T \leq \sum_{i=1,2} e\Phi_0^{(i)}/k$. Принимая для определенности отношение $\varepsilon_0/\varepsilon_1 = 5$, находим $T \leq 50$ K. Для этой температуры удовлетворяется неравенство $\hbar\Omega/kT < 1$. Выполняя разложение (45) по параметру δ и ограничиваясь при этом в ряду только квадратичными членами, получим оценку энергии резонансного взаимодействия двух осцилляторов

$$\Delta F = -(\delta^2/16kT)(\hbar\Omega)^2. \tag{46}$$

Таким образом, ΔF оказывается величиной отрицательной, что означает существование эффективной силы притяжения между поляронами.

В качестве численного примера рассмотрим состояния автолокализованного электрона в аммиаке, где вполне допустимо применение методов теории континуального полярона сильной связи [13–15]. Эффективная масса электрона на дне зоны проводимости $m^* = 1.73$ m [9] и определяется из сопоставления теоретического и экспериментального положений максимума полосы оптического поглощения автолокализованного электрона. Предельную частоту ω_0 можно оценить из ширины $W_{1/2}$ оптического спектра поглощения на его полувысоте. Для достаточно низких температур воспользуемся формулой [9]

$$W_{1/2} = 2\,(A_s^p \hbar\omega_0 \ln 2)^{1/2}. \tag{47}$$

Энергия реорганизации A_s^p полярной среды относится к наиболее интенсивному фотопереходу $s \to p$ [9]. По экспериментальному значению полуширины $W_{1/2} = 0.46$ эВ [16] получаем из (47) оценку предельной частоты $\omega_0 = 5.5 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, которая попадает в экспериментально определенную область длинноволновых либрационных колебаний $(5.1—6.3) \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$ молекул аммиака [17]. Учитывая значения диэлектрических проницаемостей аммиака $\varepsilon_0 = 22.8$ и $\varepsilon_0^{(\infty)} = 1.756$, находим константу электрон-фононной связи $\alpha_c = 13.4$.

Ограничиваясь рассмотрением классического предела, когда $\hbar^2/2m_z^{**}R_0^2 < kT < e^2/\varepsilon_0 R_0$, выберем расстояние $R_0 = 50a_0^*$, на котором межполяронное взаимодействие практически совпадает с его кулоновской асимптотикой $\sim e^2/\varepsilon_0 R_0$ [10, 11]. Сравнивая последнюю формулу с величиной (46), можно найти условия, когда произойдет полная компенсация сил кулоновского отталкивания поляронов на расстоянии R_0

$$-\frac{7\delta^2}{128kT}\,\frac{\hbar^2 e q_1^{(1)}}{m_z^{**}\varepsilon_0 h^3} > \frac{e^2}{\varepsilon_0 R_0}. \tag{48}$$

Выбирая опять отношение $\varepsilon_0/\varepsilon_1 = 5$ и принимая для температуры $T = 50$ K, а также используя значение (41) для продольной эффективной массы, находим, что толщина щели фазы 0 удовлетворяет неравенству

$$2h > \left[\frac{525kTm_z^{**}R_0^5(1-\varepsilon_1/\varepsilon_0)}{(9+5\varepsilon_1/\varepsilon_0)}\left(\frac{3}{\varepsilon_0+2}\right)^4\right]^{1/3} \simeq 60\ \text{Å}. \tag{49}$$

Теоретические оценки [18] и экспериментальные исследования [19] показывают, что пленки сохраняют свои макроскопические диэлектрические свойства вплоть до толщин h в несколько атомных слоев (~25 Å).

С другой стороны, h должно быть таким, чтобы

$$\sum_{l=1,2} e\Phi_0^{(l)} < kT.$$

Отсюда получаем ограничение на величину h сверху

$$2h < \frac{75e^2}{4\varepsilon_0 kT} \frac{(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_0)}{(9 + 5\varepsilon_1/\varepsilon_0)} \simeq 600 \text{ Å}. \tag{50}$$

По существу к аналогичным эффектам можно прийти, заменяя действие уравновешивающих электростатических сил изображения, например фазы 2, действием внешнего однородного электрического поля. Не исключено, что именно с подобными осцилляциями электронов связаны изменения температуры сверхпроводящего перехода пленок при наложении внешнего поперечного электрического поля, обнаруженных в экспериментах [20, 21].

Укажем также верхнюю границу концентрации электронов N, когда применима модель парного взаимодействия. Для этого необходимо, чтобы длина R_0 была много меньше среднего расстояния между поляронами $l \simeq (3/4\pi N)^{1/3}$. Отсюда следует оценка средней плотности поляронов $N \ll 3/4\pi R_0^3 \approx 10^{19}$ см$^{-3}$.

Список литературы

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. С. 620.
[2] Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: ИЛ, 1963. С. 432.
[3] Боголюбов Н. Н. // Укр. мат. журн. 1950. Т. 2. № 2. С. 3.
[4] Тябликов С. В. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. № 3. С. 377.
[5] Мухоморов В. К. // Опт. и спектр. 1991. Т. 71. № 6. С. 728—731.
[6] Sak J. // Phys. Rev. B. 1972. V. 6. N 10. P. 3981.
[7] Evans E., Mills D. // Solid St. Comm. 1972. V. 11. P. 1093.
[8] Богомолов В. Н., Брыксин В. В., Ситникова А. А., Толмачева В. Д., Эм Л. Х. // ФТТ. 1973. Т. 15. С. 2347—2351.
[9] Пекар С. И. Исследования по электронной теории кристаллов. М.; Л: ГИТТЛ, 1951. С. 256.
[10] Мухоморов В. К. // ФТП. 1982. Т. 16. № 6. С. 1095.
[11] Мухоморов В. К. // Опт. и спектр. 1983. Т. 55. № 2. С. 246.
[12] Агранович В. М., Галанин М. Д. Перенос энергии электронного возбуждения в конденсированных средах. М.: Наука, 1978. С. 384.
[13] Мотт Н. Ф. Переходы металл—изолятор. М.: Наука, 1979. С. 342.
[14] Томпсон Дж. Электроны в жидком аммиаке. М.: Мир, 1979. С. 450.
[15] Cohen M., Jorther J. // Amorphys and Liquid Semiconductors / Ed. J. Shuke, W. Brenig. Academ. Press (Lond.), 1974. V. 1. P. 167.
[16] Харт Э., Анбар М. Гидратированный электрон. М.: Атомиздат, 1973. С. 346.
[17] Anderson A., Walmsley S. // Mol. Phys. 1965. V. 9. N 1. P. 1.
[18] Kohn W. // Phys. Rev. 1958. V. 110. P. 857.
[19] Чопра К. Л. Электрические явления в тонких пленках. М.: Мир, 1972. С. 436.
[20] Glover R. E., Sherill M. D. // Phys. Rev. Lett. 1960. V. 5. P. 248.
[21] Rühl W. // Z. Physik. 1965. V. B. 186. P. 190.

Агрофизический
научно-исследовательский институт
ВАСХНИЛ
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
1 октября 1991 г.
В окончательной редакции
14 февраля 1992 г.