УДК 538.951+955+956+958

НЕЛИНЕЙНОСТЬ В ЭВОЛЮЦИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Е. И. Богданов, И. А. Нагибарова

Уравнения движения для конкретных квантовых систем — двухуровневой среды в электромагнитном поле, ферромагнетика в магнитном поле, спин-фононной системы, сверхпроводящего туннельного контакта, сверхпроводящих и сверхтекучих сред и т. д. — могут быть приведены к нелинейным эволюционным уравнениям: уравнению синус-Гордона (СГ), Кортевега—де Фриза (КдФ), нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) и Клейна—Гордона (КГ). Все эти явления охватывают широкий класс физических процессов, обусловленных взаимодействием различных сред с мощными полями, имеющими различную природу. Показано, что каждый тип взаимодействия (бозон-бозонное, бозон-фермионное и фермион-фермионное) описывается определенным набором эволюционных уравнений (СГ, КдФ, НУШ, КГ). Каждому типу квантовой системы находится классический аналог.

Для двухуровневой среды, взаимодействующей с одной модой электрического или магнитного поля, гамильтониан имеет вид [1]

$$\mathscr{H} = \hbar\omega a^+ a - \hbar r R_3 - \hbar\,(g^* a^+ R_- + g a R_+), \tag{1}$$

где a^+ (a) — операторы рождения (уничтожения) фотона моды поля; R_3, $R_\pm$ — кооперационные операторы углового момента; $r = -\omega$ для электрической компоненты поля (оптический резонанс); $r = \Omega$ для магнитной компоненты поля (магнитный резонанс). Здесь $\Omega = \gamma H_0$, H_0 — постоянное магнитное поле, γ — гиромагнитное отношение, g — константа взаимодействия.

Введем, по определению, следующие величины:

$$p = g^* a^+ + g a, \quad u = R_+ + R_-,$$

$$q = i g^* a^+ - i g a, \quad v = i R_+ - i R_-,$$

$$r = \omega, \quad w = 2R_3,$$

$$\Phi = \{p,\ q,\ r\}, \quad 2\mathbf{R} = \{u,\ v,\ w\}. \tag{2}$$

В обозначениях (2) гамильтониан (1) перепишется следующим образом:

$$\mathscr{H} = \frac{\hbar r}{s}(p^2 + q^2) + \frac{\hbar r}{2} w + \frac{\hbar}{2}(pu + qv),$$

где $s = |g|^2$.

Прямые вычисления приводят к следующим уравнениям движения для компонент векторов $\boldsymbol{\Phi}$ и $2\mathbf{R}$ [1]:

$$\frac{dp}{dt} = rq + sv, \quad \frac{du}{dt} = rv - qw,$$

$$\frac{dq}{dt} = -rp - su, \quad \frac{dv}{dt} = -ru + pw,$$

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = qu - pv. \tag{3}$$

Конечно, данные уравнения движения, а также все последующие получены без учета релаксационных механизмов.

Совместная система дифференциальных уравнений (3) имеет следующие общие квантовомеханические интегралы движения:

$$p^2 + q^2 + 2sw = 4sE, \quad u^2 + v^2 + w^2 = 4R^2,$$

$$pu + qv = \mathscr{K}, \quad r = \omega. \tag{4}$$

Здесь интеграл E имеет смысл энергии свободных подсистем, $\mathscr{K}$ — удвоенная энергия взаимодействия.

Существование четырех интегралов движения (4) дает возможность найти полное и точное аналитическое решение системы (3), которая по своей структуре аналогична системе уравнений движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (случай Лагранжа—Пуассона [1]).

Операторы p, q, I (I — единичный оператор) являются генераторами группы Гейзенберга—Вейля, а u, v, w — генераторами группы SU (2). Поэтому в данной ситуации представляется возможность перейти к представлению когерентных состояний [2]. Обращение к непрерывному представлению когерентных состояний (бозонных и спиновых) приводит [3] к системе уравнений для квантовомеханических средних значений компонент векторов $\mathbf{\Phi}$ и $2\mathbf{R}$, которые получаются из (3) простой заменой операторов их средними значениями, что всегда можно сделать, поскольку для когерентных состояний любой оператор может быть записан в диагональном виде [2]. При этом принимается часто используемое приближение замены среднего от произведения операторов (например, $\langle a^+R_-\rangle$) произведением их средних ($\langle a^+\rangle\langle R_-\rangle$).

Гамильтониану (I) можно соотнести [1] следующие (кроме предложенных выше) физические системы: ферромагнетик в магнитном поле, взаимодействие звуковых волн со спиновой системой (спин-фононное взаимодействие), полупроводник в электромагнитном поле. Другими словами, гамильтониан (1) описывает взаимодействие подсистем, одна из которых является бозонной, другая — фермионной.

Теперь перейдем к рассмотрению квантовых систем, которые описываются модельным гамильтонианом несколько иного типа.

В теории сверхпроводимости обычно используется гамильтониан следующего вида [4]:

$$\mathscr{H} = \sum_k \hbar\omega_k\,(c_k^+c_k + c_{-k}^+c_{-k}) - g\hbar{\sum_{k,k'}}' c_k^+c_{-k'}^+c_{-k'}c_k, \tag{5}$$

где $c_{\pm k}^+$, $c_{\pm k}$ — электронные Ферми-операторы; штрих у знака суммы означает, что $k = k'$.

Введем, по определению, следующие величины:

$$p = g{\sum_k}' \left(c_{k'}^+c_{-k'}^+ + c_{-k'}c_{k'}\right), \quad u = c_k^+c_{-k}^+ + c_{-k}c_k,$$

$$q = ig \sum_{\mathbf{k}'}{}' \left(c_{\mathbf{k}}^{+} c_{-\mathbf{k}}^{+} - c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \right), \quad v = i \left(c_{\mathbf{k}}^{+} c_{-\mathbf{k}} - c_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \right),$$

$$r = 2\omega_k = 2\omega, \quad w = 1 - c_{\mathbf{k}}^{+} c_{\mathbf{k}} - c_{-\mathbf{k}}^{+} c_{-\mathbf{k}},$$

$$N = \sum_{\mathbf{k}'}{}' \left(c_{\mathbf{k}'}^{+} c_{\mathbf{k}'} + c_{-\mathbf{k}'} c_{-\mathbf{k}'} - 1 \right), \quad \Omega \equiv 2\omega + gN,$$

$$\Phi = \{p, q, r\}, \quad 2\mathbf{R} = \{u, v, w\}. \tag{6}$$

Гейзенберговские уравнения движения для величин $\mathbf{\Phi}$ и $2\mathbf{R}$ с гамильтонианом (5) приводят к уравнениям движения

$$\frac{dp}{dt} = \Omega q, \quad \frac{du}{dt} = rv - wq,$$

$$\frac{dq}{dt} = -\Omega p, \quad \frac{dv}{dt} = -ru + wp,$$

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = qu - pv, \tag{7}$$

которые имеют интегралы движения

$$p^2 + q^2 + r^2 = \Phi^2, \quad up + qv - (\Omega - r) w = \mathscr{K},$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = 4R^2, \quad r = 2\omega. \tag{8}$$

Операторы p, q, N; u, v, w являются генераторами группы SU (2), и, следовательно, систему операторных уравнений можно записать в виде квантовомеханических средних в разложении по когерентным состояниям группы SU (2). Отметим, что система уравнений (7) в данном случае эквивалентна системе уравнений движения твердого тела с одной закрепленной точкой (случай Эйлера—Пуансо).

И, наконец, рассмотрим гамильтониан третьего типа. В теории сверхтекучести обычно используют гамильтониан следующего типа [4]:

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}} + \hbar g a_0^{+} a_0^{+} a_0 a_0 + \hbar g a_0^{+} a_0 \sum_{\mathbf{k}}{}' a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}} +$$

$$+ \hbar g \left(a_0^{+} a_0 + \sum_{\mathbf{k}}{}' a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + a_0 a_0 \sum_{\mathbf{k}'}{}' a_{\mathbf{k}}^{+} a_{-\mathbf{k}}^{+} \right).$$

Здесь $a_{\mathbf{k}}^{+}$, $a_{\mathbf{k}}$ — бозонные операторы; g — константа взаимодействия; штрих у суммы означает, что в сумме отсутствуют числа с $k = 0$. Учитывая [4], что

$$N_0^2 + 2N_0 n \cong N^2 \; (N_0 = a_0^{+} a_0),$$

$$n = \sum_{\mathbf{k}}{}' a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}}, \quad N_0 >> n, \quad \omega_{\mathbf{k}} = \omega$$

и что

$$a_0^+ a_0^+ a_0 a_0 = N_0^2 + N_0,$$

перепишем гамильтониан в следующем виде:

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}}{}' \hbar\omega \left(a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}\right) + \hbar g a_0^+ a_0 +$$

$$+ \hbar g \left(a_0^+ a_0^+ \sum_{\mathbf{k}}{}' a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + a_0 a_0 \sum_{\mathbf{k}}{}' a_{\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}\right). \tag{9}$$

Введем, по определению, следующие величины:

$$p = -g\left(a_0^+ a_0^+ + a_0 a_0\right), \quad u = \sum_k{}' a_k^+ a_{-k}^+ + \sum_k{}' a_k a_{-k},$$

$$q = -ig\left(a_0^+ a_0^+ - a_0 a_0\right), \quad v = i\sum_k{}' a_k^+ a_{-k}^+ - i\sum_k{}' a_k a_{-k},$$

$$r = a_0^+ a_0 + \frac{1}{2}, \quad w = \sum_k{}' \left(a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}\right),$$

$$\mathbf{\Phi} = \{p,\ q,\ r\}, \quad \mathbf{R} = \{u,\ v,\ w\}. \tag{10}$$

Гейзенберговские уравнения движения для Φ и R имеют вид

$$\frac{dp}{dt} = 2gq - 4g^2 rv, \quad \frac{du}{dt} = 2\omega v - qw,$$

$$\frac{dq}{dt} = 2gp + 4g^2 ru, \quad \frac{dv}{dt} = -2\omega u + pw,$$

$$\frac{dr}{dt} = gu - pv, \quad \frac{dw}{dt} = pv - qu \tag{11}$$

с интегралами движения

$$p^2 + q^2 - (2gr)^2 = \Phi^2, \quad pu + qv - \alpha w = \alpha\mathscr{H},$$

$$u^2 + v^2 - w^2 = \mathscr{H}^2, \quad r + w = N, \quad \alpha \equiv 2(\omega - g). \tag{12}$$

Операторы p, q, r; u, v, w являются генераторами группы SU (1.1), и, следовательно, систему операторных уравнений (11) можно записать в виде квантовомеханических средних в разложении по когерентным состояниям этой группы.

Системе уравнений (11) можно соотнести классическую модель — уравнения вращательного движения пары связанных материальных точек.

Если систему временных уравнений движения (3) дополнить, как это делается в оптическом резонансе, укороченными волновыми уравнениями для электромагнитного поля, то, как показано в работе [1], для p, q, r, u, v, w можно получить нелинейные эволюционные уравнения. Обобщая методику этой работы на остальные модельные квантовые системы, приходим к следующим общим выводам.

Во-первых, величины w (или $n = E - w$) удовлетворяют следующим уравнениям Кортевега—де Фриза:

$$4E\frac{\partial w}{\partial \xi} = 6w\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial^3 w}{\partial \tau^3} \quad \text{(система (1))},$$

$$-\beta\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} \quad \text{(система (5))},$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial x} = 6Nw\frac{\partial w}{\partial t} - 6w^2\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{g^2}\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} \quad \text{(система (9))},$$

где β, ρ, g — константы; $\tau = |g|t$; $\xi = |g|x/c$.

Во-вторых, величины f, $f^* = p \pm iq$ удовлетворяют нелинейному уравнению Шредингера для (1) и (9) и линейному уравнению Шредингера для (5).

В-третьих, величины u, v удовлетворяют уравнениям Клейна—Гордона; например (система (9)),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -4\Omega pw,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -4\Omega qw.$$

Все решения приведенных нелинейных уравнений связаны друг с другом через интегралы движения.

Таким образом, единообразный подход к различным типам квантовых систем позволяет на основе общей методики получить условия наблюдения тех или иных физических явлений.

Например, в работе [3] было показано, что условие сверхизлучательного фазового перехода $\omega > g\sqrt{N}$ может быть получено из системы стационарных решений для уравнений движения (3). Используя ту же методику для уравнений движения (7) и (11), можно показать, что для наблюдения сверхпроводимости необходимо выполнение условия $\omega > gN$, а для наблюдения сверхтекучести $\omega > gN^2$.

Список литературы

[1] Богданов Е. И. // Теор. и мат. физика. 1987. Т. 72. № 2. С. 244—255.
[2] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применение. М.: Наука, 1987. 268 с.
[3] Нагибарова И. А., Богданов Е. И., Дерюгин И. А. Динамика квантовых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 278 с.
[4] Киттель Ч. Квантовая теория твердых тел. М.: Наука, 1967. 491 с.

Институт физики твердого тела
и полупроводников
АН Белоруссии
Минск

Поступило в Редакцию
10 января 1992 г.