К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ *p*-ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА НА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛЕНКЕ

Г. Очирбат

Проведено аналитическое исследование рассеяния *p*-поляризованного света на пленке, обладающей нелинейностью керровского типа. Найдены два первых интеграла уравнений Максвелла, описывающих световые поля в нелинейной среде. Один из этих интегралов выражает закон сохранения потока энергии, направленного перпендикулярно к плоскости пленки, а другой представляет собой обобщение первого интеграла, полученного впервые А. Л. Берхоером и В. Б. Захаровым на случай комплексных решений. С помощью этих двух интегралов задача приводится к квадратуре. Показывается, что в случае положительности нелинейной диэлектрической постоянной амплитуды световых полей в пленке периодически меняются в направлении, перпендикулярном в плоскости пленки. Ожидается резонансное отражение или прохождение в зависимости от того, равняется ли толщина пленки четному или нечетному числу полупериодов изменения амплитуд.

Рассеяние электромагнитных волн на нелинейной диэлектрической пленке вызывает теоретический и практический интерес в силу резонансного характера этого явления. В настоящее время существуют исчерпывающие аналитические исследования для случая рассеяния *s*-поляризованного света [1, 2]. В данном случае они связаны с простой структурой уравнений полей.

Леун [1] представил электрическое поле в пленке в виде

$$E_y = F(z) \exp\left\{i \int \psi(z)\, dz\right\} \exp(ik_0\beta x - i\omega t),$$

где k_0 — модель волнового вектора света частоты ω в вакууме, β — константа распространения. Он нашел конечную связь между амплитудой $F(z)$ и фазовой функцией $\psi(z)$ и решил задачу очень искусно. Вслед за этой работой появилась аналитическая теория резонансного прохождения световых волн *s*-поляризации через слоистые нелинейные диэлектрические структуры, в которых было использовано аналогичное представление. Насколько нам известно, пока не проведено подобное аналитическое исследование для случая *p*-поляризованного света.

Известно, что в этом случае компоненты электрических и магнитных полей тесно связаны между собой и не получено отдельное уравнение для отдельной компоненты поля. Поэтому настоящая работа посвящается данному вопросу, и мы кратко изложим ниже результаты наших исследований.

1. Первые интегралы уравнений Максвелла

В духе упомянутых работ [1, 2] компоненты электрических полей E_x, E_z представим в виде

$$E_x = iA(z)\, e^{i\Phi(z)},\ A(z) > 0,\ E_z = E(z)\, e^{i\Phi_E(z)},\ E(z) > 0. \tag{1a}$$

Мы не учитываем поглощения и положим, что

$$H_y = H(z)\, e^{i\Phi_E(z)}, \tag{1б}$$

где $H(z)$ представляет собой вещественную величину. В (1а) и (1б) для краткости опущен фазовый множитель $\exp(ik_0\beta x - i\omega t)$. Напишем уравнения Максвелла в введенных величинах

$$\frac{dH}{d\tau} = -\frac{c\varepsilon_0}{\beta} \in_{xx} A \cos \Delta_\phi , \quad c\varepsilon_0 \frac{dA}{dx} = \left(\frac{H}{\beta} + c\varepsilon_0 E\right) \cos\Delta_\phi,$$

$$H\frac{dx\phi_E}{d\tau} = \frac{c\varepsilon_0}{\beta} \in_{xx} A \sin \Delta\phi , \quad c\varepsilon_0 A\frac{d\phi}{d\tau} = \left(\frac{H}{\beta} + c\varepsilon_0 E\right) \sin \Delta\phi, \tag{2}$$

Здесь $\beta = \frac{k_x}{k}$; k_x — проекция волнового вектора на направление распространения; $\tau = \beta k_0 z$; $\in_{xx}$, $\in_{zz}$ — диагональные компоненты диэлектрического тензора:

$$\in_{xx} = \in + \alpha\,(A^2 + \gamma E^2)\,, \quad \in_{xx} = \in + \alpha\,(E^2 + \gamma A^2), \tag{3}$$

где постоянная α фиксирует меру нелинейности керровского типа, γ — постоянная для данной среды величина.

Уравнения Максвелла допускают первый интеграл

$$HA \sin \Delta\phi = C_0\,, \tag{4}$$

физический смысл которого заключается в том, что поток электромагнитной энергии в перпендикулярном к плоскости пленки направлении постоянен.

В пределах пленки и внутри подложки величины A, $\Delta\varphi$ непрерывны, а магнитное поле нигде не обращается в нуль в силу (4). Это является характерным свойством рассеяния. В задаче поверхностных и волноводных волн из требования обращения полей в нуль на бесконечности с необходимостью вытекает, чтобы $C_0 \Rightarrow 0$ или $\Delta\varphi \Rightarrow 0$, т. е. функции $A(z)$, $E(z)$, $H(z)$ должны быть действительными. Вот почему солитонные решения уравнений Максвелла всегда являются вещественными функциями с точностью до фазового множителя $\exp(i\beta k_0 - i\omega t)$.

Из уравнений Максвелла находим другой первый интеграл

$$\left(\frac{dA}{dz}\right)^2 + A^2\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 = -k_0^2\,(U - \beta^2E^2) + \mathrm{const}, \tag{5}$$

где

$$U = \in A^2 + \frac{\alpha}{2}A^4 + \alpha\gamma A^2E^2 + \frac{\alpha}{2}E^4 + \in E^2.$$

Он в пределе $\varphi \Rightarrow 0$ переходит в результат, полученный впервые Берхоером и Захаровым [3].

Используя первые интегралы (4) и (5), можно выразить одну из величин $\in_{xx}$, $\in_{zz}$ через другую. Например,

$$\in_{xx} = [\pm\,(B^2 + \beta^2\,(A + AO))^{1/2} - B\,]\,\beta^{-2},$$

где

$$A = 2\gamma \in [\beta^2 (\in_{zz} - \in) + \in_{zz}(\beta^2 - \in_{zz})] + (\in_{zz} - \in) [2\in_{zz} (\beta^2 - \in_{zz}) +$$

$$+ \beta^2 (\in_{zz} - \in)] + \beta^2 \in^2, \quad AO = 2\beta^2 (\gamma^2 - 1)(2\beta^2 - \in_{zz}) \frac{\text{const}}{\in_{zz}},$$

$$B = \gamma (\beta^2 - \in_{zz}) \in_{zz}.$$

Из уравнений (2) находим, что

$$\left(\frac{d\in_{zz}}{dz}\right)^2 = k_0^2 F(\in_{zz}), \tag{6}$$

где

$$F(\in_{zz}) = 4\beta^2 \in_{xx}^2 \times$$

$$\times \frac{\left\{[\in_{xx} - \in - (\in_{zz} - \in)\gamma][\in_{zz} - \in - (\in_{xx} - \in)\gamma] - \left[\alpha \frac{\beta c_0 (1 - \gamma^2)}{c\varepsilon_0 \in_{zz}}\right]^2\right\}}{\left[2(\in_{zz} - \in)\gamma - 2(\in_{zz} - \in) + \in_{zz}\left(\frac{d\in_{xx}}{d\in_{zz}}\gamma - 1\right)\right]^2}.$$

Отсюда

$$z = z_0 + k_0^{-1} \int \operatorname{sign}\left(\frac{d\in_{zz}}{dz}\right) F(\in_{zz})^{-1/2} d\in_{zz}. \tag{7}$$

Таким образом, задача рассеяния электромагнитных волн на пленке, обладающей нелинейностью керровского типа, приводится к квадратуре. Формулы (6) и (7) отличаются от подобных выражений, полученных ранее для поверхностных и волноводных волн [4], своей общностью. Они в пределе $C_0 \Rightarrow 0$ переходят в соответствующие результаты работы [4].

2. Граничные условия

Плоскую поверхность нелинейной пленки, на которую свет падает из вакуума, возьмем в качестве координатной плоскости OXY и ось OZ направим в сторону подложки.

Волна в среде I представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн

$$H_y = H_0 (e^{ip_1 z} + re^{-ip_1 z}) \exp[i(\beta k_0 x + \delta)], \tag{8}$$

где r — комплекснозначная амплитуда отражения, δ — фаза.

Условия непрерывности H_y и E_x компонентов электромагнитных полей на границе I и II сред

$$H_0 (1 + r) = H(0) e^{i\Phi_E(0) - i\delta},$$

$$\frac{1}{c}\frac{H_0P_1}{\varepsilon_0k_0}(1-r)=iA(0)\,e^{i\Phi(0)-i\delta}.$$

Волна, распространяющаяся в III среде,

$$H_3y=H_3\exp\left[i\left(p_3(z-d)+\beta k_0x+\varphi\right)\right].$$

Для III среды определяем величину $A_3(z)$, $E_3(z)$ по формуле (1а). На границе II и III сред ($z=d$, d — толщина пленки)

$$H(d)\,e^{i\Phi_E(d)}=H_3e^{i\varphi}\ .$$

Из (8) получаем

$$\frac{1}{c}\frac{H_0^2P_1}{\varepsilon_0k_0}(1-|r|^2)=H(0)\,A(0)\sin\Delta\varphi\,(0)=C_0\,. \tag{9}$$

Для III среды перепишем закон сохранения потока энергии в направлении z

$$A_3H_3\sin\Delta\varphi_3=C_0. \tag{10}$$

Здесь $\Delta\varphi_3$ — разность фаз величин E_3 и A_3 в III среде. Если диэлектрическая константа $\in_3$ III среды положительна, то

$$H_3<0,\quad \Delta\varphi_3=-\pi/2.$$

Принимая это во внимание, получаем из (9) и (10)

$$\frac{1}{c}\frac{H_0^2}{\varepsilon_0}\frac{P_1}{k_0}(1-|r|^2)=|H_3|\,P_3\frac{1}{c\varepsilon_0\in_3k_3}, \tag{11}$$

где k_3 — модуль волнового вектора волны в III среде. Обозначим через $|t|^2$ коэффициент прохождения волн

$$|t|^2=\left(\frac{H_3}{H_0}\right)^2\frac{k_0P_3}{\in_3k_3P_1}\,. \tag{12}$$

Приведенные выше формулы достаточны для определения коэффициентов отражения и прохождения в зависимости от интенсивности падающей волны. Величины A_3, E_3, H_3 связаны между собой простыми соотношениями, поэтому, задавая одну из них, находим остальные. После этого, учитывая, что $\Delta\Phi_3=-\pi/2$, мы можем определить постоянную C_0 по формуле (10). Используя граничные условия, находим $A(d)$, $H(d)$ через A_3, H_3. Оставшуюся величину $E(d)$ определяем через $A(d)$, $H(d)$ из уравнения Максвелла

$$H=-\frac{c\varepsilon_0}{\beta}\in_{zz}E. \tag{13}$$

Подставляя $A(d)$, $E(d)$ в (5) и в выражение (3), для $\in_{zz}$ находим значения const и $\in_{zz}(d)$. После того $\in_{zz}(0)$ определяем из уравнения

$$d + k_0^{-1} \int\limits_{\epsilon_{zz}(d)}^{\epsilon_{zz}(0)} \operatorname{sign}\left(\frac{d\epsilon_{zz}}{dz}\right) F(\epsilon_{zz})^{-1/2}\, d\epsilon_{zz} = 0.$$

При этом следует обращать внимание на возможную периодичность функции $\epsilon_{zz}(z)$. Решая уравнение

$$\epsilon_{zz}(0) = \epsilon + \alpha\,[E(0)^2 + \gamma A(0)^2]. \tag{14}$$

совместно с (5) при $z = 0$, находим $E(0)$, $A(0)$. Затем, используя (14), определяем $H(0)$. Коэффициенты отражения и прохождения находятся из уравнений (11), (12).

Теперь переходим к анализу уравнения (6). Если сравнить его с формулой закона сохранения энергии в механике, то станет ясно, что оно имеет вид того закона. Поскольку одномерное финитное движение в механике является периодическим движением, то по аналогии мы можем ожидать, что при конкретных условиях функция $\epsilon_{zz}(z)$ будет периодической функцией.

С целью иллюстрации рассмотрим изотропный случай ($\gamma = 1$). Тогда формула (6) приобретает вид

$$\left(\frac{dG}{dz}\right)^2 = (\beta k_0)^2 \beta^2 \frac{\epsilon_{zz}}{2\beta^2 - \epsilon_{zz}} - \left[\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}(\epsilon_{zz}^2 - \epsilon^2) - \frac{\text{const}}{k_0^2}\right]\left\{\frac{\epsilon_{zz} - \epsilon}{\alpha} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\beta^2 - \epsilon_{zz}}\frac{\beta^2}{\epsilon_{zz}}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}(\epsilon_{zz}^2 - \epsilon^2) - \frac{\text{const}}{k_0^2}\right] - \left[\frac{k_0\beta^2 c_0}{c\varepsilon_0}\right]^2\right\}, \tag{15}$$

где

$$G = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha}\epsilon_{zz} + \beta^2\left(\frac{\beta^4}{\alpha} - \frac{\epsilon^2}{4\alpha} - \frac{\text{const}}{2k_0^2}\right)\frac{1}{2\beta^2 - \epsilon_{zz}} -$$
$$- \left(\frac{\epsilon_z^2}{8\alpha} + \frac{\text{const}}{4k_0^2}\right)\ln|\epsilon_{zz}| + \left(-\frac{\beta^4}{2\alpha} + \frac{\epsilon^2}{8\alpha} + \frac{\text{const}}{4k_0^2}\right)\ln|2\beta^2 - \epsilon_{zz}|.$$

Отсюда будем определять точки возврата, где «кинетическая энергия» $(dG/dz)^2$ обращается в нуль. В этих точках соблюдаются условия

$$H^2A^2 = C_0^2, \quad \sin\Delta\Phi = \pm 1, \tag{16}$$

где

$$A^2 = \frac{\epsilon_{zz} - \epsilon}{\alpha} - \frac{1}{2\beta^2 - \epsilon_{zz}}\frac{\beta^2}{\epsilon_{zz}}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}(\epsilon_{zz}^2 - \epsilon^2) - \frac{\text{const}}{k_0^2}\right], \tag{17}$$

$$E^2 = \frac{\beta^2}{2\beta^2 - \epsilon_{zz}}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}(\epsilon_{zz}^2 - \epsilon^2) - \frac{\text{const}}{k_0^2}\right]. \tag{18}$$

Исследуем уравнение (15) для самофокусирующей среды ($\alpha > 0$) при условии $\epsilon > 2\beta^2$. Выделяя в (17), (18) те значения ϵ_{zz}, в которых выполняются условия

$A^2 >= 0$, $E^2 >= 0$, мы находим, что величина H^2A^2 обращается в нуль в точках, где $A = 0$ и

$$\in_{zz} = \left(\in^2 + 2\alpha \frac{const}{k_0^2}\right)^{1/2},$$

и имеет смысл между этими точками. Уравнение (16) имеет два решения при условии $c_0^2 =< (H^2A^2)_{\max}$, т. е. имеются две точки возврата.Это означает, что в случае самофокусирующих сред диэлектрическая константа $\in_{zz}(z)$ будет периодической функцией своего аргумента. А в противоположном случае $\in_{zz}(z) < 0$ волна в среду глубоко не входит, поэтому $-\in_{zz}$ убывает в глубь среды.

На границе II и III сред $(z = d)$ в силу $\Delta\Phi(d) = \pm\pi/2$ производные от A, H и E обращаются в нуль; это означает, что периодическая функция $\in_{zz}$ будет принимать либо максимальное, либо минимальное значение на этой границе. Значения полей на другой границе $(z = 0)$ зависят от того, какое из этих двух значений принимает величина $\in_{zz}$ на $z = d$. Поэтому обоим случаям отвечают разные режимы рассеяния.

Величина периода изменения диэлектрической функции является важной и тонкой характеристикой поля в пленке, поскольку мы ожидаем резонансное отражение или прохождение в зависимости от того, равняется ли толщина пленки четному или нечетному числу полупериодов изменения диэлектрической функции.

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность В. К. Федянину и Д. Михалаке, а также Р. Г. Назмитдинову за интерес к данной работе.

Список литературы

[1] Leung K. M. // Phys. Rev. B. 1989. V. 39. N 6. P. 3590.
[2] Langbein V., Lederer F., Peschel T., Trutschel U., Mihalache D. // Phys. Reports. 1990. V. 194. N 5, 6. P. 325.
[3] Берхоер А. Л., Захаров В. Б. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. № 3. С. 903.
[4] Михалаке Д., Назмитдинов Р. Г., Федянин В. К. // ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. № 1. С. 198.

Объединенный институт
ядерных исследований
Москва

Поступило в Редакцию
13 сентября 1991 г.