УДК 538.221

СОЛИТОНЫ И ТРЕХВОЛНОВОЙ РЕЗОНАНС НА ФОНЕ МОДУЛИРОВАННОЙ МАГНИТНОЙ СТРУКТУРЫ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ

В. В. Киселев

Получены эффективные уравнения для описания слабонелинейных возбуждений на фоне модулированной магнитной структуры антиферромагнетиков (пространственная группа C^2_{2h}—$P2_1/m$). Предсказаны солитоноподобные возбуждения в модулированной структуре.

Среди многообразия магнитоупорядоченных кристаллов привлекают своей необычностью соединения, основное состояние которых характеризуется пространственно-периодическим распределением магнитных моментов. Появление такой модулированной магнитной структуры (ММС) может быть связано с отсутствием инверсии в группе симметрии кристалла [1]. На феноменологическом уровне это соответствует наличию в разложении свободной энергии инвариантов, линейных по пространственным производным от параметра порядка. Вследствие неоднородности основного состояния теоретическое рассмотрение нелинейных возбуждений над ММС представляет непростую задачу. Найденные решения [2–4] полных или упрощенных уравнений динамики для ферро- и антиферромагнетиков с одним векторным параметром порядка позволяют заключить, что обменно-релятивистские и релятивистские взаимодействия допускают формирование на фоне ММС солитоноподобных волн намагниченности. В данной работе мы продолжим начатое в [5] исследование динамики моноклинных антиферромагнетиков (пространственная группа C^2_{2h}—$P2_1/m$), ММС которых описывается двумя неприводимыми векторами. Рассматриваемый механизм образования ММС может быть реализован в соединениях MnOOH, DyOOH или их аналогах $Mn_{1-x}A_xOOH$ (A — немагнитный ион). Учитывая, что ММС соединения MnOOH одномерная, выражение для свободной энергии запишем в виде [6]

$$F = \frac{1}{2} \int d\xi \left[\alpha\,(\partial_\xi \mathbf{M})^2 + \alpha''\,(\partial_\xi \mathbf{L})^2 + \delta \mathbf{M}^2 + \delta'' \mathbf{L}^2 + D(\mathbf{M}\partial_\xi \mathbf{L} - \mathbf{L}\partial_\xi \mathbf{M})\right]. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ — векторы ферро- и антиферромагнетизма соответственно ($\mathbf{M}_i$ — намагниченности двух подрешеток системы, $\mathbf{M}_1^2 = \mathbf{M}_0^2 = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$). Динамика квазиодномерных возбуждений ММС определяется уравнениями Ландау—Лифшица, которые могут быть получены из лагранжиана

$$L = \frac{M_0}{g} \int d\xi\,(\sin\theta_1 \partial_t \varphi_1 + \sin\theta_2 \partial_t \varphi_2) - F. \qquad (2)$$

Здесь мы используем параметризацию для векторов $\mathbf{M}_i$ [5]

$$\mathbf{M} = M_0 (\cos\theta_i \cos(\gamma\xi + \varphi_i),\ \cos\theta_i \sin(\gamma\xi + \varphi_i),\ \cos\theta_i);\quad i = 1.2,$$

g — гиромагнитное отношение. Выражение для свободной энергии F в переменных $\theta_i(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi, t)$, волновой вектор γ магнитной спирали, угол Φ разворота векторов $\mathbf{M}_i$ в основном состоянии, а также другие параметры ММС приведены в [5].

В данной работе мы ограничимся рассмотрением слабонелинейных возбуждений на фоне ММС. Тогда при теоретическом описании волн намагниченности удается корректно преодолеть трудности, связанные с неоднородностью основного состояния, нелинейностью динамических уравнений и наличием большого числа параметров порядка. С помощью различных вариантов редуктивной теории возмущений мы сведем полные уравнения эволюции к эффективным, которые содержат меньшее число динамических переменных, корректно учитывают нелинейные взаимодействия и допускают точное решение. Данная работа свидетельствует в пользу утверждения [7, 8] о том, что редуктивная теория возмущений не только представляет способ правильной аппроксимации динамики сложной системы, но и, выделяя скрытые алгебраические симметрии, часто приводит к уравнениям, обладающим замечательными свойствами универсальности и интегрируемости. В [5] мы показали, что во всей области существования ММС слабонелинейное взаимодействие бесщелевых (голдстоуновских) мод описывается интегрируемым уравнением Буссинеска; предсказали возможность возбуждения солитонов на фоне ММС и, следовательно, «прозрачность» ММС для нелинейных спиновых волн. В настоящей работе рассмотрена динамика активационных волн, порожденных внешней накачкой. Выведены эффективные уравнения, пригодные для описания взаимодействия голдстоуновских и активационных волн в широком диапазоне значений физических параметров, включая область длиннокоротковолнового резонанса Бенни. В области резонанса мы находим солитоноподобное решение полученных уравнений, которое описывает связанное состояние солитона, ассоциированного с голдстоуновскими модами, и солитона огибающей активационных волн. Возбуждение такого «бисолитона» происходит при условии, что групповая скорость активационных волн превышает некоторое критическое значение.

Интересно, что для рассматриваемых кристаллов причиной формирования солитонов ММС является только обменное взаимодействие.

1. Солитоны огибающей активационных мод

Рассматриваемая система имеет две ветви линейных спиновых волн — бесщелевую $\omega_G = cp + p^3 b/2c$ и активационную $\omega_a = \omega_0 + p^2 f/2\omega_0$. Параметры c, b приведены в [5],

$$f = (2M_0 g)^2 \left(D\beta \cos\frac{\Phi}{2}\right)^2 \left[2\alpha\alpha'' + 2\alpha^2 \cos^2\frac{\Phi}{2} + \right.$$

$$\left. + \left(\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}(\alpha - \alpha'')\right)^2 - 4\alpha\alpha''^2\beta \sin^6\frac{\Phi}{2}\right],$$

$$\omega_0^2 = (2M_0 g)^2 \left(D\cos\frac{\Phi}{2}\right)^4 \alpha\beta^3 . \qquad (3)$$

В [5] при описании взаимодействия волн с бесщелевым законом дисперсии $\omega_G(p)$ мы пренебрегли влиянием гармоник с частотой $\omega_a(p)$, так как для их возбуждения необходима энергия активации. Пусть активационные моды возбуждаются за счет внешней накачки. Очевидно, что на их динамику бесщелевые моды могу оказать заметное влияние, если спектры гармоник удовлетворяют услови синхронизма

$$\omega_a(p_2) = \omega_a(p_1) \pm \omega_G(\varkappa), \quad p_2 = p_1 + \varkappa . \qquad (4$$

В данной работе мы имеем систему с уникальными законами дисперсии, дл которых возможность трехволнового резонанса впервые установлена в [9]. Сс гласно [9], условие синхронизма (4) автоматически выполнится, когда группова скорость $c_g = \partial\omega_a / \partial p$ короткой активационной волны (с волновым векторо $p_1 \cong p_2$) равна фазовой скорости c длинной бесщелевой волны (с волновы вектором $\varkappa$ ($|\varkappa| << |p_1|$)). В результате на больших временах будет происходит важный обмен энергий между волнами разных масштабов. Прежде чем перейт к обсуждению длиннокоротковолнового резонанса, рассмотрим более прост вопрос — слабонелинейную динамику активационных мод вдали от резонанс Полученная информация будет полезна для описания резонанса. С этой цель выпишем уравнения Ландау—Лифшица для отклонений φ_i, θ_i ($i = 1, 2$) от осно ного состояния с точностью до кубичных членов

$$\partial_t \mathbf{V} + A(\nabla) : \mathbf{V} + B(\nabla) : \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + C(\nabla) : \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + E : \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \cdot \partial_t \mathbf{V} = 0 . \qquad (5$$

Здесь $\mathbf{V} = (\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2)$, $A(\nabla) : \mathbf{V} = A_0 : \mathbf{V} + A_1 : \partial_\xi \mathbf{V} + A_2 : \partial_\xi^2 \mathbf{V}$ и т. д. Заметим, ч структура уравнений Ландау—Лифшица такова, что разложение $B(\nabla) : \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ начин ется со слагаемых, линейных по градиентам

$$B(\nabla) : \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = B_0 : \mathbf{V} \cdot \partial_\xi \mathbf{V} + B_1 : \partial_\xi \mathbf{V} \cdot \partial_\xi \mathbf{V} + B_2 : \mathbf{V} \cdot \partial_\xi^2 \mathbf{V} .$$

Линеаризованное около равновесного состояния $\mathbf{V}_0 = 0$ уравнение (5) допускае решение в форме активационной плоской волны $\sim \exp(i\omega_a t + ip\xi)$. Наша цель исследовать, как нелинейные взаимодействия модулируют активационную мод Для получения эффективных уравнений используем метод многомасштабны разложений [8, 10]. Идея метода состоит в том, чтобы включить быстрые лс кальные осцилляции через зависимость от гармоник,[1] а медленную эволюци амплитуды описать переменными $\tau = \varepsilon^2 t$, $z = \varepsilon(\xi + c_g t)$, $c_g = \partial\omega_a / \partial p$. С математиче ской точки зрения решение уравнений (5) в окрестности $\mathbf{V}_0 = 0$ будем искать форме

$$\mathbf{V} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varepsilon^\alpha \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l^{(\alpha)}(z, \tau) \exp[\, il(\omega t + p\xi)] \equiv \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varepsilon^\alpha u^{(\alpha)} . \qquad (6$$

Коэффициенты $u_l^{(\alpha)}$ удовлетворяют условиям $u_l^{(\alpha)} = u_{-l}^{(\alpha)*}$, гарантирующи вещественность $\mathbf{V}$. Заметим, что мы рассматриваем область, далекую от резонансной, поэтому масштабные преобразования при выборе медленных переменны вводим так, чтобы согласовать пространственно-временные изменения амплиту с законом дисперсии активационной моды $\omega_a = \omega_0 + p^2 f / 2\omega_0$. Подставляя (6) в (5) и приравнивая коэффициенты при степенях ε и ε^2, находим

$$W_l\, u_l^{(1)} = 0 , \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \qquad (7a)$$

---

1 Пространственный масштаб быстрых осцилляций должен быть больше шага магнитной спирали: $p << \gamma$.

$$W_l\, u_l^{(2)} = -\left(c_g I + A_1 + 2ilpA_2\right) \partial_z u_l^{(1)} - B_0 : \left\{ u^{(1)} \sum_{l'} il' p u_{l'}^{1} \exp i\theta_{l'} \right\}_l +$$

$$+ B_1 : \left\{ \sum_{l', l''} l' l'' p^2 u_{l'}^{1} u_{l''}^{(1)} \exp i\left(\theta_{l'} + \theta_{l''}\right) \right\}_l + B_2 : \left\{ u^{(1)} \sum_{l'} u_{l'}^{1} (l')^2 p^2 \exp i\theta_{l'} \right\}_l . \qquad (7б)$$

Здесь $\theta_1 = l\,(\omega_a t + p\xi)$, $\{Q\}_l$ обозначает коэффициент при первой гармонике в разложении функции $Q\,(\xi,\ t)$

$$Q = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{Q\}_l \exp i\theta_l .$$

Матрица W_l имеет вид

$$W_l = il\omega I + A_0 + ilpA_1 - (pl)^2 A_2 ,\quad A_0 + ipA_1 - p^2 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h & k \\ 0 & 0 & k^* & h \\ e & u & 0 & 0 \\ u^* & e & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad (8)$$

$$h = -n - gM_0(\alpha + \alpha'')p^2 ,\quad k = -m + gM_0\left[2Dip - (\alpha - \alpha'')p^2\right] ,$$
$$e = s + gM_0(\alpha + \alpha'')p^2 ,$$

$$u = -s + gM_0\left[(\alpha - \alpha'')p^2 \cos\Phi - 2D\beta\left(\alpha \cos^2\frac{\Phi}{2} - \alpha''\sin^2\frac{\Phi}{2}\right) ip\right] ,$$
$$s = 2gM_0 D\gamma\,(\sin\Phi)^{-1} ,$$

$$\beta^{-1} = \alpha\cos^2\frac{\Phi}{2} + \alpha''\sin^2\frac{\Phi}{2} ,\quad n + m = 2gM_0 D^2 \alpha''\beta^2 \sin^4\frac{\Phi}{2} ,$$
$$n - m = 2gM_0 D^2 \alpha\beta^2 \cos^4\frac{\Phi}{2} .$$

Наличие активационных мод проявляется в вырожденности матриц $W_{\pm 1}$. Специфика данной задачи состоит в том, что вырожденной оказывается и матрица W_0. С точки зрения физики это соответствует тому, что медленные биения активационных мод могут подкачивать или возбуждать медленную бесщелевую моду. В результате даже вдали от резонанса активационные и бесщелевые волны оказываются связанными. Поскольку $\det W_l \neq 0$ при $l = \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$, решение уравнений (7а) имеет вид

$$u_1^{(1)} = \frac{1}{2}\varphi^{(1)} R_1 \exp i\theta_1 ,\quad u_0^{(1)} = \frac{1}{2}\Psi^{(1)} R_0 ,\quad u_l^{(1)} = 0 ,\quad l = \pm 2, \pm 3, \ldots , \qquad (9)$$

где $\varphi^{(1)}$ и $\Psi^{(1)}$ — произвольные функции медленных переменных, векторы R_i — решения однородных систем $W_i R_i = 0$ $(i = 0,\ 1)$ — могут быть записаны в виде

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,\quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ ir \\ -ir \end{pmatrix} (1 + O(pa)) ,\quad r = \omega_0 / n - m ,\quad \omega_0^2 = 2s(n - m) . \qquad (10)$$

Функции $u_{\pm 1}^{(1)}$ описывают активационные волны. Порожденная биениями бесщелевая волна отвечает слагаемому u_0. Согласно теоремам Фредгольма [11], уравнения (7б) при $l = 0,\ \pm 1$ разрешимы лишь при выполнении условий ортогональности их правых частей к решениям L_0, $L_{\pm 1}$ сопряженных однородных систем $L_i W_i = 0$ $(i = 0, \ \pm 1)$. Мы нашли

$$L_0 = (0, 0, 1, 1,), \quad L_1 = (-ir, ir, -1, 1)\left(1 + O(pa)\right) = L^*_{-1}. \tag{11}$$

В длинноволновом пределе при исследовании взаимодействия волн можно пренебречь зависимостью от p в нелинейных членах уравнений динамики, а также использовать приближенные выражения (10), (11) для R_1, L_1. Анализ показывает, что при этом мы упускаем малые поправки порядка $O(p/\gamma)$, $O(pa)$, $O(ap^2/\gamma)$, $O((ap)^2)$ к постоянным взаимодействиям в эффективных уравнениях. В линейных членах уравнений динамики зависимость от p следует сохранить. Нетрудно показать, что в порядке ε^2 условия разрешимости выполняются автоматически, отличны от нуля лишь пять гармоник $l = 0, \ \pm 1, \ \pm 2$. Окончательный результат запишем в форме

$$\begin{gathered} u^{(2)} = -\frac{1}{2} Z_0 \left\{ (c_g I + A_1)\, \partial_z \Psi^{(1)} R_0 + \left|\varphi^{(1)}\right|^2 \left[O(p) + O(p^2)\right] \right\} + \Psi^{(2)} R_0, \\ u_1^{(2)} = -\frac{1}{2} Z_1 (c_g I + A_1 + 2ipA_2)\, \partial_z \varphi^{(1)} R_1 + \varphi^{(2)} R_1, \quad u_2^{(2)} = \varphi^{(1)2} \left[O(p) + O(p^2)\right]. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь псевдообратные матрицы Z_0 и Z_1 имеют вид

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/s & 0 \\ -n/m & m/\Delta & 0 & 0 \\ m/\Delta & -n/\Delta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{inr}{s(m-n)} & \dfrac{imr}{s(n-m)} & \dfrac{n+m}{s(m-n)} & 0 \\ \dfrac{-n}{(n-m)^2} & \dfrac{m}{(n-m)^2} & \dfrac{imr}{s(n-m)} & 0 \\ \dfrac{2n-m}{(n-m)^2} & \dfrac{-n}{(n-m)^2} & \dfrac{inr}{s(m-n)} & 0 \end{pmatrix} \left(1 + O(pa)\right). \tag{13}$$

В третьем порядке редуктивной теории возмущений условия разрешимости для гармоник с $l = 0, \ \pm 1$ уже не выполняются автоматически. Ключевой момент состоит в том, что требование ортогональности правых частей этих уравнений к векторам L_0, L_1 дает замкнутую систему уравнений для определения функций $\varphi^{(1)}$ и $\Psi^{(1)}$, которые в первых двух порядках теории возмущений были произвольными. Эта система и представляет эффективные уравнения эволюции огибающей активационных волн. Окончательный вид условий разрешимости суть

$$-i\partial_\tau \varphi^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_p^2 \omega_a \partial_z^2 \varphi^{(1)} - gM_0 r^{-1} \gamma (\alpha + \alpha'')\, \partial_z \Psi^{(1)} \varphi^{(1)} + g_2 \left|\varphi^{(1)}\right|^2 \varphi^{(1)} = 0, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} (c_g^2 - c^2)\, \partial_z \Psi^{(1)} = 2gM_0 \gamma (n + m)(\alpha + \alpha'') \left|\varphi^{(1)}\right|^2 \equiv \\ \equiv g_1 r \left[gM_0 \gamma (\alpha + \alpha'') \right]^{-1} \left|\varphi^{(1)}\right|^2, \\ g_2 = \frac{1}{2} D^2 g M_0 r^{-1} \beta \left\{ 1 + \frac{1}{2} r^4 \cos^2 \frac{\Phi}{2} \left[1 + \cos^2 \frac{\Phi}{2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\beta}{2} (\alpha - \alpha'') \sin^2 \frac{\Phi}{2} \cos^2 \frac{\Phi}{2} \right] \right\} - \frac{3}{8} \gamma^2 \alpha'' r^3. \end{gathered}$$

Согласно (14), вдали от резонанса голдстоуновская мода не является свободной. Она следует за модулированной активационной волной. Эффективные уравнения для огибающей активационных волн (14) эквивалентны нелинейному уравнению Шредингера

$$- i\partial_\tau \varphi^{(1)} + \frac{1}{2}\partial_p^2\omega_a\partial_z^2\varphi^{(1)} + \left[g_1(c^2 - c_g^2)^{-1} + g_2\right] \left|\varphi^{(1)}\right|^2 \varphi^{(1)} = 0 . \tag{15}$$

Заметим, что резонансный характер взаимодействия активационных и бесщелевых волн проявился в наличии «опасного» слагаемого $\sim (c^2 - c_g{}^2)^{-1}$ в (15). Наше рассмотрение справедливо вдали от резонанса, где $c_g{}^2 \neq c^2$. Известно [8], что уравнение (15) имеет быстроубывающие солитонные решения лишь при выполнении условия

$$\partial_p^2\omega_a \left[g_1(c^2 - c_g^2)^{-1} + g_2\right] > 0 . \tag{16}$$

Возможность наблюдения солитонов зависит от типа ММС и соотношения между c^2 и $c_g{}^2$. Приведем односолитонное решение уравнения (15)

$$\varphi^{(1)} = (2\,|q|)^{-1/2} u \exp\left[i\left(\varphi_0 + \frac{\nu}{2} z \left(2\,|\partial_p^2\omega_a|^{-1}\right)^{1/2} - \frac{1}{4}(u^2 - \right.\right.$$

$$\left.- \nu^2)\,\tau \operatorname{sign}\partial_p^2\omega_a\right] \operatorname{sech}\frac{u}{2}\left(\nu\tau \operatorname{sign}\partial_p^2\omega_a + z\left(2\,|\partial_p^2\omega_a|^{-1}\right)^{1/2} - x_0\right) . \tag{17}$$

Здесь u, σ, φ_0, x_0 — вещественные параметры, $q = g_1(c^2 - c_g{}^2)^{-1} + g_2$. Локализованное состояние (17) реализуется в результате развития модуляционной неустойчивости активационных волн. Генерация солитонов носит пороговый характер по энергии накачки и экспериментально должна проявляться в «прозрачности» образца для спиновых волн.

2. Трехволновой резонанс

В области резонанса (4) активационные и бесщелевые волны интенсивно взаимодействуют между собой. Поэтому приведенное выше рассмотрение, базирующееся на выделении одной из них, становится неадекватным. Необходимо перестроить редуктивную теорию возмущений так, чтобы активационные и голдстоуновские моды входили на равных основаниях. Это требует некоторой изобретательности [8, 12]. Для наших целей удобно более детально выписать структуру уравнений Ландау—Лифшица (5)

$$\partial_t \varphi + A_1(\nabla):\boldsymbol{\theta} + C_1(\nabla):\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\theta} + F_1:\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\theta} + \tag{18}$$

$$+ F_2:\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta} + E:\partial_t\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta} = 0 ,$$

$$\partial_t \boldsymbol{\theta} + A_2(\nabla):\boldsymbol{\varphi} + C_2(\nabla):\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi} + C_3(\nabla):\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta} + G_1:\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi} +$$

$$+ G_2:\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta} + H:\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\partial_t\boldsymbol{\theta} = 0 .$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, $A_i(\nabla) = A_i^{(0)} + A_i^{(1)}\partial_\xi + A_i^{(2)}\partial_\xi^2$ $(i = 1, 2)$, $C_j(\nabla) = C_j^{(1)}\partial_\xi + C_j^{(2)}\partial_\xi^2$ $(j = 1, 2, 3)$ и т. д. В длинноволновом приближении мы пренебрегаем слагаемыми с пространственными производными в кубических членах уравнений (18). Комбинируя уравнения (18), находим

$$\begin{aligned}\partial_t^2\boldsymbol{\varphi} - A_1(\nabla):\Big[A_2(\nabla):\boldsymbol{\varphi} + C_2(\nabla):\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi} + C_3(\nabla):\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta} +\\ + G_1:\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi} + G_2:\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta} + H:\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\partial_t\boldsymbol{\theta}\Big] -\\ - C_1(\nabla):\Big[A_1(\nabla):\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varphi}\cdot A_2(\nabla):\boldsymbol{\varphi}\Big] +\\ + F_1:\partial_t(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\theta}) + F_2:\partial_t(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}) +\\ + E:\partial_t(\partial_t\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}) = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Чтобы исследовать взаимодействие волн в нашей системе, введем нормальные координаты $(R,\ V)$ вместо $(\varphi_1,\ \varphi_2)$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}R\\V\end{pmatrix} = S(\nabla)\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Оператор $S(\nabla)$ выбирается так, чтобы диагонализовать линеаризованное около равновесного состояния $\varphi_0=0$ уравнение (19): $\partial_t^2 R + \omega_G^2(-i\partial_\xi)R + \ldots = 0$, $\partial_t^2 V + \omega_a^2(-i\partial_\xi)V + \ldots = 0$. Очевидно, новые динамические переменные V и R соответствуют активационной и голдстоуновской модам. Явный вид операторов $\omega_a(-i\partial_\xi)$ и $\omega_G(-i\partial_\xi)$ определяется законами дисперсии $\omega_a(p)$ и $\omega_G(p)$. При преобразовании квадратичных членов в уравнениях (19) нам потребуются выражения для операторов $S(\nabla)$ и $S^{-1}(\nabla)$, содержащие лишь первые производные от пространственных переменных

$$S(\nabla) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 + 2\omega_0^{-2}(\varepsilon_2 m - \varepsilon_1 s)\partial_\xi & 1 - 2\omega_0^{-2}(\varepsilon_2 n - \varepsilon_1 s)\partial_\xi\\ 1 - 2\omega_0^{-2}(\varepsilon_2 m - \varepsilon_1 s)\partial_\xi & -1 + 2\omega_0^{-2}(\varepsilon_2 n - \varepsilon_1 s)\partial_\xi\end{pmatrix},$$
$$\varepsilon_1 = 2gM_0D,$$

$$S^{-1}(\nabla) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 + \dfrac{\varepsilon_2}{s}\partial_\xi & -1 + \dfrac{(2\varepsilon_1 s - \varepsilon_2(n+m))}{s(n-m)}\partial_\xi\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_2 = -2gM_0D\beta\left(\alpha\cos^2\frac{\Phi}{2} - \alpha''\sin^2\frac{\Phi}{2}\right).$$

При упрощении уравнений использовались те же приближения, что и в вариантах редуктивной теории возмущений с приоритетом активационных или бесщелевых волн. Конечно, выбор медленных переменных в этих теориях возмущений не одинаков. Однако в первых порядках обе теории возмущений дают близкие результаты (ср. формулы (24) из [5] и (12)). Это обстоятельство позволяет выбрать приближенное выражение для полей $(\varphi_1,\ \varphi_2)$, которое является самосогласованным с обеими вариантами теории возмущений

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2} S^{-1}(\nabla) \begin{pmatrix} R \\ V\end{pmatrix} \cong \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R+V \\ R-V+\frac{\varepsilon_2}{s}\partial_\xi\end{pmatrix}. \tag{21}$$

С учетом сказанного выше можно показать, что при преобразовании квадратичных членов в уравнениях (19) основной вклад дают слагаемые $A_1(\nabla) : (C_2(\nabla) : \boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}$. При рассмотрении кубичных членов в (19) мы пренебрегли пространственными производными, однако оставили слагаемые, содержащие производные по времени. Для исключения быстрых временны́х осцилляций, связанных с активационными модами, перейдем от динамической переменной V к комплексной огибающей

$$V = \Psi(\xi, t) \exp i\omega_0 t + \text{c. c.} \tag{22}$$

Тогда в главном приближении

$$\partial_t \varphi = \frac{1}{2}\partial_t V\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix} \cong \frac{i\omega_0}{2}\Psi \exp i\omega_0 t \begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix} + \text{c. c.},$$

$$\theta = \frac{1}{2(n-m)}\partial_t V\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix} \cong \frac{ir}{2}\Psi \exp i\omega_0 t \begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix} + \text{c. c.},$$

$$\partial_t \theta = sV\begin{pmatrix} -1\\ 1\end{pmatrix} \cong s\Psi \exp i\omega_0 t \begin{pmatrix} -1\\ 1\end{pmatrix} + \text{c. c.}$$

В результате простых алгебраических преобразований получаем систему связанных уравнений, которые эффективно описывают слабонелинейную динамику активационных и бесщелевых волн в широком интервале волновых чисел, включая область резонанса

$$\partial_t^2 R - c^2\partial_\xi^2 R + b\partial_\xi^4 R - 2gM_0\gamma(n+m)(\alpha+\alpha'')\partial_\xi |\Psi|^2 - a\partial_\xi(\partial_\xi R)^2 = 0, \tag{23а}$$

$$i\partial_t\Psi - \frac{1}{2}\partial_p^2\omega_a\partial_\xi^2\Psi + gM_0\gamma r^{-1}(\alpha+\alpha'')\Psi\partial_\xi R - g_2|\Psi|^2\Psi = 0. \tag{23б}$$

Обозначения постоянных a, b, c, n, m, g_2, r такие же, что и в формулах (21) из [5] и (8), (14). Когда активационные моды не возбуждаются ($\Psi = 0$), система (23) переходит в уравнение (21) работы [5] ($\partial_\xi R = u$). Покажем, что при внешней накачке вдали от резонанса ($c_g^2 \neq c^2$) система (23) сводится к уравнениям (15), полученным в предыдущем разделе. Для этого исключим быстрые пространственно-временны́е осцилляции и перейдем в систему координат, движущуюся с групповой скоростью c_g активационной волны

$$\Psi = \varphi^{(1)}(z,t) \exp\left[ip\xi + \frac{i}{2}\partial_p^2\omega_a p^2 t\right],\ c_g = \partial_p\omega_a = \partial_p^2\omega_a p,\ z = \xi + c_g t. \tag{24}$$

Учтем, что вдали от резонанса в уравнении (23а) для бесщелевых волн можно пренебречь дисперсией (слагаемое $b\partial_\xi^4 R$), самодействием ($-a\partial_\xi(\partial_\xi R)^2$), а также инерционными членами, т. е. слагаемыми, содержащими производные по «медленному» времени. В результате получаем уравнения (14) ($R = \Psi^{(1)}$).

В данном разделе нас интересуют магнитные возбуждения в области, где приближенно выполняются условия резонанса $c_g^2 \cong c^2$. Заметим, что равенство $c_g^2 = c^2$ предполагает определенное значение волнового числа активационных волн

$$p_c = 2\alpha\alpha''\gamma\sin^2\frac{\Phi}{2}\,[2\alpha\alpha'' + 2\alpha^2\cos^2\frac{\Phi}{2} + + (\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}(\alpha - \alpha''))^2 - 4\alpha\alpha''^2\beta\sin^6\frac{\Phi}{2}\,]^{-1}. \tag{25}$$

Выражение (25) вводит новый пространственный масштаб p_c^{-1}, который должен быть больше шага магнитной спирали γ^{-1}: $p_c \ll \gamma \ll a_0^{-1}$ (a_0 — постоянная решетки). Это требование, а значит, и условие $c_g \cong c^2$ выполняются лишь в ферромагнитной области существования ММС [5] (при $\Phi \cong 0$, $p_c = \gamma O(a_0^2\gamma^2)$).

Мы нашли, что система (23) допускает следующее солитоноподобное возбуждение в области, где $c_g^2 \simeq c^2$:

$$\partial_c = -6B^2a^{-1}b\,\mathrm{ch}^{-2}\,[B(\xi + \lambda t)],\quad B^2 = -(4b)^{-1}(\lambda^2 - v_c^2),$$

$$\Psi = \sqrt{\sigma}B\exp\left\{ i\varphi_0 + \frac{i\lambda\xi}{\partial_p^2\omega_a} + \frac{i}{2}\left(\frac{\lambda^2}{\partial_p^2\omega_a} - \partial_p^2\omega_a B^2\right)t\right\}\mathrm{ch}^{-2}\,[B(\xi + \lambda t)],$$

$$\sigma = g_2^{-1}\,[\partial_p^2\omega_a - 6gM_0\gamma b\,(ar)^{-1}(\alpha + \alpha'')],$$

$$\varphi_0 = \varphi_0^*,\; v_c^2 = c^2 - \frac{1}{3b}M_0 ga\gamma\sigma(n + m)(\alpha + \alpha''). \tag{26}$$

Ограничения $v_c^2 > 0$, $\sigma > 0$, $ab < 0$, при которых существует самолокализованная волна (26), выполняются в ферромагнитной области. Нетрудно видеть, что солитоноподобное возбуждение (26) является промежуточным между солитоном (17), ассоциированным с огибающей активационных волн, и солитоном бесщелевой ветви спектра спиновых волн [5]. Выражение (26) можно интерпретировать как связанное состояние солитона работы [5] и солитона (17), которое порождается при внешней накачке, когда групповая скорость активационных волн λ превышает определенное критическое значение. Заметим, что критическая скорость v_c лишь малыми поправками отличается от c ($v_c^2 > c^2$).

Полные уравнения (26), по-видимому, не являются интегрируемыми. Их многосолитонные решения найдены в [13, 14] лишь в пренебрежении самодействием активационных волн ($g_2 = 0$) и при более жестких, чем приведенные выше, ограничениях на константы взаимодействия: $\partial_p^2\omega_a - 6gM_0\gamma b\,(ar)^{-1}(\alpha + \alpha'') = 0$, $b = -1/12\cdot(\delta_p^2\omega_a)^2$. См. также [15], где рассматривались связанные уравнение КдВ и уравнение Шредингера без самодействия. Наши результаты показывают, что учет самодействия активационных мод, которое имеется всегда, приводит к возможности существования локализованного возбуждения в широкой области значений физических параметров.

Заметим, что при строгом выполнении условия $c_g = c$ система (26) может быть редуцирована к интегрируемой модели Захарова—Бенни [16]

$$\partial_t u - gM_0\gamma c^{-1}(n + m)(\alpha + \alpha'')\partial_z|\varphi^{(1)}|^2 = 0,$$

$$i\partial_t\varphi^{(1)} - \frac{1}{2}\partial_p^2\omega_a\partial_z^2\varphi^{(1)} + gM_0\gamma r^{-1}(\alpha + \alpha'')u\varphi^{(1)} = 0. \tag{27}$$

в области, где допустимо пренебрежение дисперсией бесщелевых волн, а также самодействием активационных и голдстоуновских мод по сравнению с их взаимодействием друг с другом. Здесь $u = \partial_z = R$, $R = R(z, t)$, $z = \xi + c_g t$, функция $\varphi^{(1)}$ связана с Ψ соотношением (24). Схема вывода (27) аналогична переходу от (13) к (14). Поскольку при резонансе голдстоуновская ветвь обладает некоторой свободой, в конечных уравнениях в отличие от (14) следует оставить слагаемое, содержащее первую производную по «медленному» времени $\partial_t^2 R - c^2\partial_\xi^2 R \cong 2c\partial_t u$. Многосолитонные решения системы (27) исследованы в [17, 18]. Солитон в модели (27) движется с групповой скоростью, превышающей c, и по форме совпадает с (26).

В заключение заметим, что все полученные в этой работе эффективные уравнения либо совпадают с интегрируемыми нелинейными моделями либо близки к ним. Это означает, что их решения могут быть детально проанализированы с помощью теории возмущений, основанной на методе обратной задачи рассеяния.

Автор признателен А. Б. Борисову и А. П. Танкееву за внимание к работе и обсуждение ее результатов.

Список литературы

[1] Дзялошинский И. Е. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. № 3. С. 992—1002.
[2] Борисов А. Б., Изюмов Ю. А. // ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 4. С. 859—861.
[3] Барьяхтар В. Г., Соболева Т. К., Сукстанский А. Л. // ФТТ. 1985. Т. 27. № 8. С. 2428—2434.
[4] Барьяхтар В. Г., Соболева Т. К. // ФТТ. 1986. Т. 28. № 3. С. 720—724.
[5] Борисов А. Б., Киселев В. В. // ФТТ. 1990. Т. 32. № 1. С. 212—219.
[6] Стефановский Е. П. // ФНТ. 1987. Т. 13. № 7. С. 740—746.
[7] Калоджеро Ф. // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев: Наукова думка, 1990. С. 65—116.
[8] Додд Р., Эйлбек Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 694 с.
[9] Benney D. J. // Stud. Appl. Math. 1976. V. 55. P. 93—106; 1977. V. 56. P. 81—94.
[10] Taniuti T., Yajima N. // J. Math. Phys. 1969. V. 10. N 8. P. 1369—1372.
[11] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. С. 440.
[12] Yajima N., Satsuma J. // Prog. Theor. Phys. 1979. V. 62. N 2. P. 370—378.
[13] Mel'nikov V. K. // J. Math. Phys. 1987. V. 28. N 11. P. 2603—2609.
[14] Hase Y., Satsuma J. // J. Phys. Soc. Jpn. 1988. V. 57. N 3. P. 679—682.
[15] Ma B. Y. G. // Stud. Appl. Math. 1979. V. 60. P. 73—82.
[16] Захаров В. Е. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. № 5. С. 1745—1759.
[17] Yojima N., Oikawa N. // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 56. P. 1719—1739.
[18] Ma Y. G. // Stud. Appl. Math. 1978. V. 59. P. 201—221.

Институт физики металлов
УрО РАН
Екатеринбург

Поступило в Редакцию
30 июля 1991 г.