

УДК 621.315

© 1992

ТЕОРИЯ МНОГОФОНОННОГО РЕЗОНАНСНОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ С РАВНЫМИ ЭФФЕКТИВНЫМИ МАССАМИ ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК

И. Г. Ланг, С. Т. Павлов, О. Сотолонго Коста

Вычислено сечение многофононного резонансного комбинационного рассеяния света (МРКРС) в полупроводниках InBr и InI класса A^3B^7 в предположении равенства $m = m_h$, где m (m_h) — эффективная масса электрона (дырки). Показано, что величина вклада в сечение свободных электронно-дырочных пар в качестве промежуточных состояний резко возрастает при переходе от случая неравных масс (как в полупроводниках A^2B^6) к случаю $m = m_h$, а именно: при неравных массах $\sigma_N \sim \alpha^3$, при равных $\sigma_N \sim \alpha$ при $N \geq 4$, где σ_N — сечение МРКРС N -го порядка, α — фреilihовская константа связи электронов (дырок) с LO фононами. Поэтому переход к случаю $m = m_h$ эквивалентен включению сильного магнитного поля, которое также приводит к увеличению интенсивности МРКРС в α^{-2} раз. Таким образом, предположение о $m = m_h$ позволяет объяснить обе основные особенности спектров МРКРС в InBr и InI: величину четных пиков по сравнению с величиной нечетных и чрезвычайно большое общее число наблюдаемых пиков, достигающее до $N = 20$.

Многофононное резонансное комбинационное рассеяние света (МРКРС) наблюдается при облучении ряда полупроводников в области фундаментального поглощения. Спектр рассеянного излучения представляет собой серию узких линий с частотами $\omega_i - N\omega_{LO}$, где ω_i — частота падающего света, ω_{LO} — частота продольных оптических LO колебаний решетки, N — целое число. Впервые явление МРКРС было обнаружено в полупроводниках класса A^2B^6 (см., например, [1-3]). Максимальное число N достигает значения семи-девяти. Интенсивность линий рассеяния слабо убывает с ростом порядка N рассеяния.

Сравнительно недавно получены спектры МРКРС в полупроводниках класса A^3B^7 , а именно в InBr [4-6] и InI [7]. Эти спектры отличаются от ранее наблюдавшихся двумя ярко выраженными особенностями: во-первых, обнаружено очень большое число линий (N достигает 20), во-вторых, интенсивность линий четного порядка больше, чем интенсивность линий нечетных. Вторая особенность должна быть присуща спектрам МРКРС в полупроводниках при условии равенства эффективных масс электрона и дырки, что было теоретически предсказано в [8, 9]. В [6, 7] высказано предположение о том, что в полупроводниках InBr и InI эффективные массы электронов и дырок равны между собой. В теоретической работе [10] показано в общем виде, что при условии $m = m_h$, где m (m_h) — эффективная масса электрона (дырки), для величин эффективных сечений МРКРС нечетного порядка получается нулевой результат. Доказательство из [10] применимо независимо от того, какие состояния электронно-дырочных пар (ЭДП) рассматриваются в качестве промежуточных в процессе МРКРС — экситоны или свободные ЭДП.

В дополнение к [10] можно привести еще одно наглядное доказательство равенства нулю интенсивностей линий нечетного порядка. Если на диаграмме, изображающей амплитуду МРКРС нечетного порядка, поменять дырки на

электроны, и наоборот, то в случае $m=m_h$ знак амплитуды изменится на противоположный, так как при такой замене меняются только знаки каждого из взаимодействий электрона (дырки) с фононом, поскольку фреilihовское взаимодействие дырки с LO фононом отличается от взаимодействия электрона с тем же фононом только противоположным знаком. Отсюда следует, что полная амплитуда процесса нечетного порядка равна нулю. На эксперименте линии нечетного порядка все же видны, хотя их интенсивность меньше интенсивности четных линий. Это можно объяснить несколькими причинами, например отклонением от точного равенства $m=m_h$, малым отклонением зон от сферичности, слабым влиянием носителей другого сорта и т. д.

Настоящая работа (см. также [11]) посвящена объяснению первой особенности спектров МРКРС в соединениях класса A^3B^7 , т. е. увеличению интенсивности МРКРС, обусловленному равенством $m=m_h$. Прежде всего отметим, что существуют два механизма процессов МРКРС, которые действуют одновременно. Первый — это экситонный механизм (см., например, [12-14]), второй — механизм с участием свободных ЭДП (см., например, [15, 16]). В [7, 10, 17, 18] для теоретического описания процессов МРКРС в $InBr$ и InI привлекается экситонный механизм. Изучены особенности экситонного механизма при $m=m_h$. В [7] предложена модель, согласно которой экситон, рождаясь в состоянии $n=2$, затем совершает переходы типа $2-1-2-1 \dots -2$, где 1 и 2 — главные квантовые числа. В [10, 17, 18] показано, что возможна альтернатива — релаксация экситона по зоне $n=2$ с переменой только орбитальных квантовых чисел l . Вклад экситонного механизма в величину сечения МРКРС при $m=m_h$ и любом значении N пропорционален первой степени константы Фрелиха α взаимодействия электронов с LO фононами, так же как вклад этого же механизма в случае неравных эффективных масс $m \neq m_h$ (см., например, [14]). Однако эффективность экситонного механизма рассеяния света при больших числах N испущенных LO фононов подавляется процессами распада экситонов. В [10] показано, что при $m=m_h$ для кристаллов $InBr$ и InI вероятность распада экситона приблизительно на порядок превышает сумму вероятностей прочих переходов, при которых экситон сохраняется как целое. При таких условиях экситонный механизм МРКРС должен быть малоэффективным. Заметим также, что никакого увеличения интенсивности МРКРС в случае равных масс электрона и дырки за счет экситонного механизма не должно происходить, что исключает возможность объяснить первую особенность МРКРС в A^3B^7 каскадными процессами с участием экситонов.

Итак, остается единственная возможность объяснить рост интенсивности МРКРС в случае $m=m_h$ с помощью переходов, в которых в промежуточных состояниях присутствуют свободные ЭДП. Ниже показано, что такое объяснение удается найти.

1. Вычисление величин эффективных сечений рассеяния света с помощью диаграммной методики

На рис. 1 схематически изображен процесс МРКРС четвертого порядка ($N=4$) с участием свободных электронов и дырок в качестве промежуточных состояний в случае $m=m_h$. Посредством прямого перехода свет с частотой ω , рождает ЭДП, затем электрон и дырка испускают по два LO фонона и происходит прямая аннигиляция ЭДП с испусканием светового кванта $\hbar\omega_s$. Возможны другие процессы, например, испускание всех четырех фононов электроном и т. д., но эти процессы дают меньший вклад в сечение МРКРС, поскольку они обязательно включают в себя один непрямой переход — непрямое рождение ЭДП или непрямую аннигиляцию, как в случае неравных эффективных масс электрона и дырки [16].

Вклад процесса, изображенного на рис. 1, был вычислен с использованием модели и диаграммной методики, описанной в [16]. Сечение рассеяния выражается через тензор рассеяния света четвертого ранга следующим образом [19, 20]:

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega_s} = \frac{V_0 \omega_s^3 \omega_l n_s}{c^4 n_l} e_{sz}^* e_{l\gamma} e_{s\beta} e_{i\lambda}^* S_{\alpha\gamma\beta\lambda}(\omega_l, \omega_s, \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_s), \quad (1)$$

где V_0 — нормировочный объем; $n_l(n_s)$, $\mathbf{e}_l(\mathbf{e}_s)$ — показатель преломления и вектор поляризации возбуждающего (рассеянного) света соответственно.

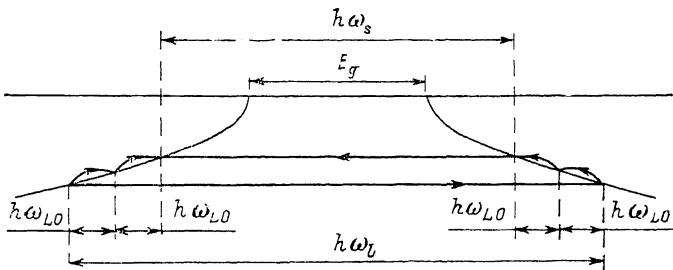


Рис. 1. Схематическое изображение процесса, дающего наибольший вклад в эффективное сечение МРКС четвертого порядка ($N=4$) в случае равных эффективных масс электрона и дырки.

Процессу на рис. 1 соответствует диаграмма на рис. 2. Написав с использованием правил диаграммной методики [16] выражение для тензора $S_{\alpha\gamma\beta\lambda}^{(4)}$, соответствующего рис. 2, в первую очередь произведем интегрирование по «сво-

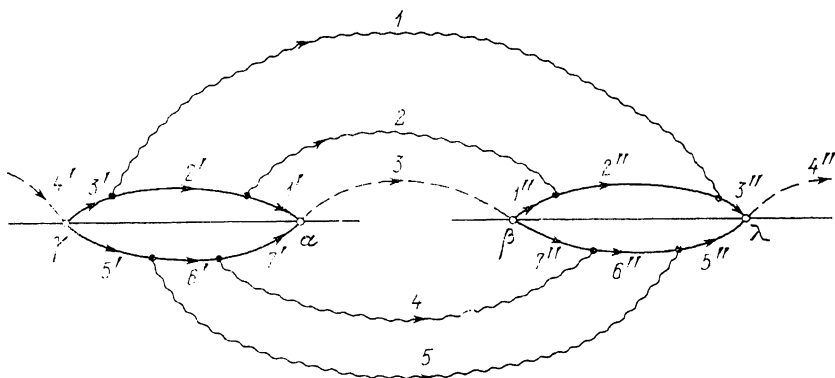


Рис. 2. Диаграмма, соответствующая процессу МРКС, изображенному на рис. 1: $\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1$, ω_1 (1); $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, ω_2 (2); 0, ω_s (3); $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$, $\omega_l - \omega_s - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ (4); $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_0$, ω_3 (5); $\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}/2$, $\omega_0 - \omega_1 - \omega_2$ (1'); $\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}/2$, $\omega_0 - \omega_1$ (2'); $\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2$, ω_0 (3'); 0, ω_l (4'); $-\mathbf{k}_0 - \mathbf{p}/2$, $\omega_l - \omega_0$ (5'); $-\mathbf{k}_3 - \mathbf{p}/2$, $\omega_l - \omega_0 - \omega_3$ (6'); $-\mathbf{k}_3 - \mathbf{p}/2$, $\omega_s - \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$ (7'); $\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}/2$, $\omega_0 - \omega_1 - \omega_2$ (1''); $\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}/2$, $\omega_0' - \omega_1$ (2''); $\mathbf{k}_0 - \mathbf{p}/2$, ω_0' (3''); 0, ω_l (4''); $-\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2$, $\omega_l - \omega_0'$ (5''); $-\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}/2$, $\omega_l - \omega_3 - \omega_0'$ (6''); $-\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}/2$, $\omega_s - \omega_0' + \omega_1 + \omega_2$ (7'').

бодным» частотам ω_0 , ω_0' , ω_1 , ω_2 и ω_3 . После довольно громоздких алгебраических преобразований получаем выражение, соответствующее «правилу сечений», а именно:

$$S_{\alpha\gamma\beta\lambda}^{(4)} = (V_0 \omega_s^2 \omega_l^2)^{-1} \hbar^{-10} J_\alpha^* J_\gamma J_\beta J_\lambda^* \delta(\omega_l - \omega_s - 4\omega_{LO}) \sum_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{p}} |C_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1}|^2 |C_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}|^2 \times \\ \times |C_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}|^2 |C_{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_0}|^2 A(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{p}) A^*(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, -\mathbf{p}), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{J} = \frac{e}{m_0} \mathbf{p}_{cv},$$

$$C_{\mathbf{q}} = -i\hbar\omega_{LO} \left(\frac{4\pi\alpha l^3}{V_0} \right)^{1/2} \frac{1}{ql},$$

$$l = \left(\frac{\hbar}{2m\omega_{LO}} \right)^{1/2},$$

$$\alpha = \frac{e^2}{2\hbar\omega_{LO}l} (\kappa_{\infty}^{-1} - \kappa_0^{-1}), \quad (2a)$$

e , m_0 — заряд и масса свободного электрона, \mathbf{p}_{cv} — междузонный матричный элемент импульса, m — эффективная масса электрона, α — фрёлиховская константа [21] связи электронов и дырок с фононами, κ_0 (κ_{∞}) — статическая (высокочастотная) диэлектрическая проницаемость,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6, \quad (3)$$

где A_1 , A_2 , A_3 — вклады, соответствующие графикам, схематически изображенным на рис. 3, и равные

$$A_1 = [(a_1 + b_1)(a_2 + b_1)(a_3 + b_1)(a_3 + b_2)(a_3 + b_3)]^{-1},$$

$$A_2 = [(a_1 + b_1)(a_2 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_2)(a_3 + b_3)]^{-1},$$

$$A_3 = [(a_1 + b_1)(a_2 + b_1)(a_2 + b_2)(a_2 + b_3)(a_3 + b_3)]^{-1}, \quad (4)$$

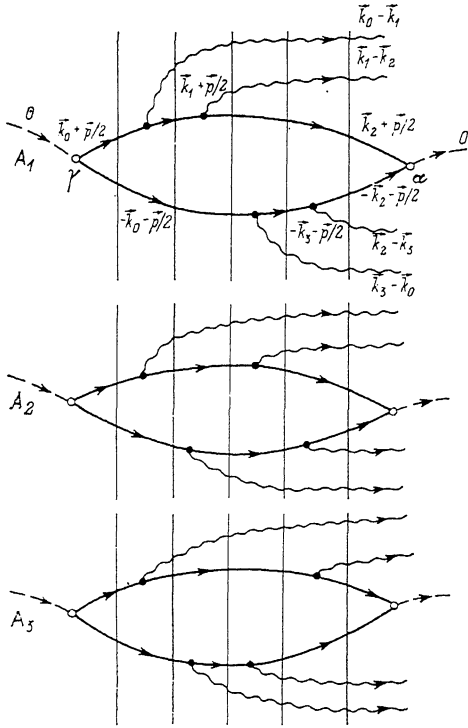


Рис. 3. Диаграммы для трех из шести амплитуд соответствующих процессу МРКРС, при котором два фотона испущены электроном и два — дыркой.

Диаграммам на этом рисунке соответствуют выражения, полученные в результате интегрирования исходных выражений по свободным частотам.

причем A_4 , A_5 и A_6 отличаются соответственно от A_1 , A_2 и A_3 заменой a на b , и наоборот, т. е. заменой электронов на дырки и наоборот (рис. 3). В (4) введены обозначения

$$a_1 = \omega_l - E_g/\hbar - \omega(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2) + (i/2)\gamma(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2),$$

$$a_2 = \omega_l - E_g/\hbar - \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}/2) - \omega_{LO} + (i/2)\gamma(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}/2),$$

$$a_3 = \omega_l - E_g/\hbar - \omega(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}/2) - 2\omega_{LO} + (i/2)\gamma(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}/2),$$

$$b_1 = -\omega_h(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2) + (i/2)\gamma(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2),$$

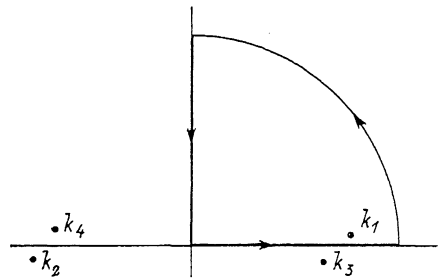


Рис. 4. Контур интегрирования при вычислении интеграла (21а).

$$\begin{aligned} b_2 &= -\omega_h(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}/2) - \omega_{L0} + (i/2) \gamma(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}/2), \\ b_3 &= -\omega_h(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}/2) - 2\omega_{L0} + (i/2) \gamma(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}/2), \end{aligned} \quad (5)$$

причем

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad \omega_h(\mathbf{k}) = \frac{\hbar k^2}{2m_h},$$

где m_h — эффективная масса дырки, которую мы пока не приравняем к эффективной массе электрона; $\gamma(\mathbf{k})$ и $\gamma_h(\mathbf{k})$ — вероятности испускания LO фонона электроном и дыркой соответственно. При написании (2) мы использовали свойства $\omega_h(-\mathbf{k}) = \omega_h(\mathbf{k})$, $\gamma_h(-\mathbf{k}) = \gamma_h(\mathbf{k})$.

Легко видеть, что в согласии с «правилом сечений» каждый из пяти множителей вида $(a_i + b_j)^{-1}$ в выражении для амплитуды A_m из правой части (4) соответствует одному (n -му) из пяти вертикальных сечений на рис. 3 таким образом, что

$$a_i + b_j = \omega_l - \hbar^{-1} E_{\text{полн}}^{(n)} + (i/2) \gamma_{\text{полн}}^{(n)}, \quad (6)$$

где $E_{\text{полн}}^{(n)}$ — полная энергия и $\gamma_{\text{полн}}^{(n)}$ — полное обратное время жизни ЭДП в данном сечении. Энергия $E_{\text{полн}}$ отсчитывается от основного состояния кристалла. Например, в первом слева сечении для всех шести амплитуд имеем

$$E_{\text{полн}}^{(1)} = E_g + \hbar\omega(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2) + \hbar\omega_h(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2), \quad (7)$$

$$\gamma_{\text{полн}}^{(1)} = \gamma(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2) + \gamma_h(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2). \quad (8)$$

Если невозможно выполнение равенства

$$\hbar\omega_l = E_{\text{н.л.в}}^{(n)}, \quad (9)$$

например, в случае нерезонансного комбинационного рассеяния, когда $\omega_l < \hbar^{-1} E_g$, то в правой части (6) можно пренебречь величиной $(i/2) \gamma_{\text{полн}}^{(n)}$, и мы получаем результат, соответствующий теории возмущений.

Мы рассматриваем резонансное рассеяние и более конкретно — случай достаточно больших значений частот ω_l при облучении в области собственного поглощения полупроводника, когда для всех пяти промежуточных состояний для любой из амплитуд возможно равенство (9). Тогда величины $(i/2) \gamma_{\text{полн}}^{(n)}$ в правой части (6) играют очень важную роль и пренебрегать ими ни в коем случае нельзя.

Прежде чем приступить к суммированию (интегрированию) по векторам $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ и \mathbf{p} в правой части (2), заметим следующее. Ниже будет показано (см. также [16]), что при интегрировании по абсолютной величине вектора \mathbf{p} существенны малые значения порядка

$$p \simeq \gamma m / \hbar \omega \mathcal{K}, \quad (10)$$

где \mathcal{K} — характерные значения волновых векторов электрона и дырки (см., например, рис. 1). Оценка (10) соответствует физическому смыслу вектора $\hbar\mathbf{p}$: он описывает неопределенность импульса относительного движения электрона и дырки и отличен от нуля из-за того, что ЭДП в промежуточных состояниях кристалла сохраняет конечный объем [16]. Поскольку p мало, существенно, к чему приводит серия равенств (9) при $\mathbf{p} = 0$. Например, для амплитуды A_1 имеем

$$\begin{aligned} E_{\text{полн}}^{(1)}(\mathbf{p} = 0) &= E_g + \hbar\omega(\mathbf{k}_0) + \hbar\omega_h(\mathbf{k}_0), \\ E_{\text{полн}}^{(2)}(\mathbf{p} = 0) &= E_g + \hbar\omega(\mathbf{k}_1) + \hbar\omega_h(\mathbf{k}_0) + \hbar\omega_{L0}, \\ E_{\text{полн}}^{(3)}(\mathbf{p} = 0) &= E_g + \hbar\omega(\mathbf{k}_2) + \hbar\omega_h(\mathbf{k}_0) + 2\hbar\omega_{L0}, \\ E_{\text{полн}}^{(4)}(\mathbf{p} = 0) &= E_g + \hbar\omega(\mathbf{k}_2) + \hbar\omega_h(\mathbf{k}_3) + 3\hbar\omega_{L0}, \\ E_{\text{полн}}^{(5)}(\mathbf{p} = 0) &= E_g + \hbar\omega(\mathbf{k}_2) + \hbar\omega_h(\mathbf{k}_2) + 4\hbar\omega_{L0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя последовательно равенства $E_{\text{полн}}^{(n)}(\mathbf{p}=0) = \hbar\omega_l$ при $n=1, 2, 3, 4$, находим следующие значения абсолютных значений векторов $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0 &= \sqrt{(2\mu/\hbar)\omega_{\text{нач}}}, \\ \mathcal{K}_1 &= \sqrt{(2\mu/\hbar)(\omega_{\text{нач}} - m\omega_{LO}/\mu)}, \\ \mathcal{K}_2 &= \sqrt{(2\mu/\hbar)(\omega_{\text{нач}} - 2m\omega_{LO}/\mu)}, \\ \mathcal{K}_3 &= \sqrt{(2\mu/\hbar)(\omega_{\text{нач}} - m_h\omega_{LO}/\mu)},\end{aligned}\quad (12)$$

где

$$\omega_{\text{нач}} = \omega_l - \hbar^{-1}E_g, \quad \mu = \frac{mm_h}{m + m_h}.\quad (13)$$

Подставив найденное значение \mathcal{K}_2 в выражение $E_{\text{полн}}^{(5)}(\mathbf{p}=0)$ из (11), получаем

$$\Delta E = \hbar\omega_l - E_{\text{полн}}^{(5)}(\mathbf{p}=0) = 2\left(\frac{m}{m_h} - 1\right)\hbar\omega_{LO}.\quad (14)$$

Таким образом, при неравных массах последнему промежуточному состоянию соответствует большой энергетический знаменатель, т. е. это состояние является виртуальным. Результаты (12) и (14) получаем аналогичным способом и для амплитуд A_2 и A_6 . Для амплитуд A_3, A_4 и A_5 получаем те же значения $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3$, но другое значение

$$\mathcal{K}'_2 = \sqrt{(2\mu/\hbar)(\omega_{\text{нач}} - 2m_h\omega_{LO}/\mu)}\quad (15)$$

и соответственно другое значение

$$\Delta E' = 2\left(\frac{m_h}{m} - 1\right)\hbar\omega_{LO}.\quad (16)$$

Группы амплитуд A_1, A_2, A_5 и A_3, A_4, A_5 отличаются друг от друга тем, что в первой группе последний фотон испускается дыркой, а во второй группе — электроном. Поэтому виртуальные состояния, предшествующие излучательной аннигиляции, для этих групп различны. Для первой группы виртуально последнее (третье) состояние дырки, а для второй группы — виртуально последнее (третье) состояние электрона. Возможны также другие варианты процесса, в которых виртуальными являются первые или вторые состояния электрона или дырки. Во всех случаях при неравных эффективных массах электрона и дырки пара проходит одно виртуальное состояние, которому соответствует большой энергетический знаменатель $\hbar\Delta E$.

В [16] показано, что сечение МРКРС при $m \neq m_h$ пропорционально α^3 при $N \geq 4$, где α — фреilihовская константа, N — порядок рассеяния.

В случае равных масс $m = m_h$ имеем

$$\Delta E = 0,\quad (17)$$

т. е. пара не проходит ни одного виртуального состояния, что видно и на рис. 1. Отсюда заранее можно предположить, что в случае $m = m_h$ вместо α^3 получим α , поскольку большие величины ΔE в знаменателе амплитуды заменяются величинами порядка $\hbar\gamma \sim \alpha$.

Подтвердим это предположение прямыми вычислениями.

2. Величины сечений в случае равных масс

В случае

$$m = m_h\quad (18)$$

легко видеть, что вместо (12) получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0 &= \sqrt{m\omega_{\text{нач}}/\hbar}, \\ \mathcal{K}_1 &= \mathcal{K}_3 = \sqrt{m(\omega_{\text{нач}} - 2\omega_{L0})/\hbar}, \\ \mathcal{K}_2 &= \sqrt{m(\omega_{\text{нач}} - 4\omega_{L0})/\hbar}.\end{aligned}\quad (19)$$

Рассмотрим прежде всего «классический» вклад в сечение МРКРС, соответствующий сумме произведений $A_m(\mathbf{p}) A_m^*(-\mathbf{p})$. Все остальные являются интерференционными вкладами и не меняют оценки порядка величины сечения МРКРС. Поскольку абсолютные величины векторов \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 отличаются от значений (19) только малыми величинами порядка $p = \gamma m/\hbar \mathcal{K}$, в (5) можно положить

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2) &\simeq \gamma(\mathcal{K}_0), \\ \gamma(\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{p}/2) &\simeq \gamma(\mathbf{k}_3 \pm \mathbf{p}/2) \simeq \gamma(\mathcal{K}_1), \\ \gamma(\mathbf{k}_2 \pm \mathbf{p}/2) &\simeq \gamma(\mathcal{K}_2),\end{aligned}\quad (20)$$

причем вводим обозначения

$$\gamma(\mathcal{K}_0) = \gamma_0, \quad \gamma(\mathcal{K}_1) = \gamma_1, \quad \gamma(\mathcal{K}_2) = \gamma_2. \quad (21)$$

В правой части (2) выполним интегрирование по абсолютным величинам векторов \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 с учетом малости величин p и γ . Для иллюстрации способа приближенного вычисления интегралов вычислим здесь интеграл

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\infty dk k^2 \left[\omega - \frac{\hbar}{2m} (\mathbf{k} + \mathbf{p}/2)^2 + i\gamma/2 \right]^{-1} \left[\omega - \frac{\hbar}{2m} (\mathbf{k} - \mathbf{p}/2)^2 - i\gamma/2 \right]^{-1} = \\ &= \left(\frac{2m}{\hbar} \right)^2 \int_0^\infty dk k^2 [(\mathbf{k} + \mathbf{p}/2)^2 - \mathcal{K}^2 - iQ^2]^{-1} [(\mathbf{k} - \mathbf{p}/2)^2 - \mathcal{K}^2 + iQ^2]^{-1},\end{aligned}\quad (21a)$$

где $\mathcal{K}^2 = 2m\omega/\hbar$, $Q^2 = m\gamma/\hbar$. Полюса подынтегрального выражения расположены в точках

$$\begin{aligned}k_{1,2} &= -\frac{p}{2} \cos \vartheta \pm \sqrt{\mathcal{K}^2 - (p/2)^2 \sin^2 \vartheta + iQ^2}, \\ k_{3,4} &= \frac{p}{2} \cos \vartheta \pm \sqrt{\mathcal{K}^2 - (p/2)^2 \sin^2 \vartheta - iQ^2},\end{aligned}$$

где ϑ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{p} .

Используем контур интегрирования (рис. 4) с дугой бесконечного радиуса. Искомый интеграл равен

$$J = 2\pi i \omega_1 - \Delta J,$$

где ω_1 — вычет подынтегральной функции в точке k_1 , ΔJ — интеграл по вертикальному участку контура.

Для величины $2\pi i \omega_1$ получаем точный результат

$$2\pi i \omega_1 = 2\pi (m/\hbar)^2 k_1^2 \left[\sqrt{\mathcal{K}^2 - (p/2)^2 \sin^2 \vartheta + iQ^2} (Q^2 + ik_1 p \cos \vartheta) \right]^{-1}.$$

В интеграле ΔJ совершим замену переменной $k = ik'$, тогда имеем

$$\Delta J = i(2m/\hbar)^2 \int_0^\infty dk' k'^2 \left[\left(k'^2 + \mathcal{K}^2 - \frac{p^2}{4} \right)^2 + (Q^2 - k' p \cos \vartheta)^2 \right]^{-1}.$$

Далее используем приближение $Q^2 \simeq \mathcal{K} p \ll \mathcal{K}^2$. Тогда

$$\Delta J \ll 2\pi i \omega_1, \quad k_1 \simeq \mathcal{K},$$

$$J \simeq 2\pi i \omega_1 \simeq 2\pi (m/\hbar)^2 \mathcal{K} [Q^2 + i p \mathcal{K}]^{-1},$$

где \mathcal{K} — вектор, модуль которого равен \mathcal{K} .

По такому же принципу вычисляется интеграл по модулям векторов \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 в правой части (2), хотя вычисления более громоздкие из-за того, что в знаменателе подынтегрального выражения, согласно (4), встречаются суммы $\hbar (\mathbf{k}_0 + \mathbf{p}/2)^2/2m + \hbar (\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}/2)^2/2m$ и т. д. Получаем следующий результат для «классического» вклада в сечение МРКРС, соответствующего процессу на рис. 1:

$$\frac{d^2\sigma_{\text{классич}}}{d\omega d\omega_s} = \frac{V_0^5 \omega_s n_s}{2^5 \pi^5 \omega_1 n_1} \left(\frac{e}{m_0}\right)^4 |e_i \mathbf{p}_{cv}|^2 |e_s \mathbf{p}_{cv}|^2 \frac{m^{10}}{\hbar^2 \omega c^4} \mathcal{H}_0 \mathcal{H}_1^2 \mathcal{H}_2 \delta(\omega_i - \omega_s - 4\omega_{L0}) (4\pi)^{-4} \times \\ \times \int d\omega_0 \int d\omega_1 \int d\omega_2 \int d\omega_3 |C_{\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_1}|^2 |C_{\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2}|^2 |C_{\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_3}|^2 |C_{\mathcal{H}_3 - \mathcal{H}_0}|^2 \int d^3 p R(\mathbf{p}), \quad (22)$$

$$R(\mathbf{p}) = (Q_0^2 + i\mathcal{H}_0 \mathbf{p})^{-1} (Q_2^2 + i\mathcal{H}_2 \mathbf{p})^{-1} [Q_0^2 + Q_1^2 + i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1) \mathbf{p}]^{-1} \{ [Q_0^2 + Q_2^2 + \\ + i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_2) \mathbf{p}]^{-2} [Q_1^2 + Q_3^2 + i(\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3) \mathbf{p}]^{-1} + [2Q_1^2 + i(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_3) \mathbf{p}]^{-1} \times \\ \times [Q_0^2 + 2Q_1^2 + Q_3^2 + i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3) \mathbf{p}]^{-1} [Q_1^2 + Q_2^2 + i(\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3) \mathbf{p}]^{-1} + \\ + [Q_1^2 + Q_3^2 + i(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) \mathbf{p}]^{-1} [2Q_1^2 + i(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_3) \mathbf{p}]^{-1} [Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + \\ + i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) \mathbf{p}]^{-1} \}, \quad (23)$$

где $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ — векторы с фиксированными модулями (19)

$$Q_0^2 = m\gamma_0/\hbar, \quad Q_1^2 = m\gamma_1/\hbar, \quad Q_2^2 = m\gamma_2/\hbar,$$

\mathcal{O}_i — набор углов, определяющих направление вектора \mathcal{H}_i . Первый член в фигурных скобках из правой части (23) происходит от суммы $A_1(\mathbf{p}) A_1^*(-\mathbf{p}) + A_4(\mathbf{p}) A_4^*(-\mathbf{p})$, второй — от суммы $A_2(\mathbf{p}) A_2^*(-\mathbf{p}) + A_5(\mathbf{p}) A_5^*(-\mathbf{p})$ и третий — от суммы $A_3(\mathbf{p}) A_3^*(-\mathbf{p}) + A_6(\mathbf{p}) A_6^*(-\mathbf{p})$.

Вместо \mathbf{p} введем безразмерную переменную интегрирования

$$\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{p}, \quad (24)$$

где $\lambda_0 = \hbar \mathcal{K}_0 / m\gamma_0$ — длина свободного пробега электрона (дырки) с волновым вектором \mathcal{H}_0 , ограниченная возможностью реального испускания LO фотона. Тогда получаем

$$\frac{d^2\sigma_{\text{классич}}}{d\omega d\omega_s} = \frac{\alpha^4}{2^5 \pi^5} \sigma_0 V_0 \frac{\omega_s n_s}{\omega_s n_1} \delta(\omega_i - \omega_s - 4\omega_{L0}) \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \mathcal{H}_1^2 \mathcal{H}_2 \frac{|e_i \mathbf{p}_{cv}|^2 |e_s \mathbf{p}_{cv}|^2}{\hbar^4 \mathcal{K}_0^4} \frac{\lambda_0^3}{l^3 (\mathcal{K}_0 l)^9} \varphi, \quad (25)$$

где

$$\sigma_0 = \left(\frac{e^2}{m_0 c^2}\right)^2, \quad (26)$$

φ — безразмерная величина, определяемая выражением

$$\varphi = (4\pi)^{-4} \int d\omega_0 \int d\omega_1 \int d\omega_2 \int d\omega_3 |\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1|^{-2} |\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|^{-2} |\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_3|^{-2} |\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_0|^{-2} \times \\ \times \int d^3 x \Phi(\mathbf{x}), \quad (27)$$

где

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mathcal{H}_0}{\mathcal{K}_0}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{K}_0}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{K}_0}, \quad \mathbf{B}_3 = \frac{\mathcal{H}_3}{\mathcal{K}_0}, \quad (28)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = (1 + i\mathbf{B}_0\mathbf{x})^{-1}(\beta_2 + i\mathbf{B}_2\mathbf{x})^{-1}[1 + \beta_1 + i(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)\mathbf{x}]^{-1}\{[1 + \beta_2 + i(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_2)\mathbf{x}]^{-2} \times \\ \times [\beta_1 + \beta_2 + i(\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3)\mathbf{x}]^{-1} + [2\beta_1 + i(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3)\mathbf{x}]^{-1}[1 + 2\beta_1 + \beta_2 + i(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \\ + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3)\mathbf{x}]^{-1}[\beta_1 + \beta_2 + i\mathbf{x}(\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3)\mathbf{x}]^{-1} + [\beta_1 + \beta_2 + i(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\mathbf{x}]^{-1} \times \\ \times [2\beta_1 + i(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3)\mathbf{x}]^{-1}[1 + \beta_1 + \beta_2 + i(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\mathbf{x}]^{-1}\}, \quad (29)$$

$$\beta_1 = \gamma_1/\gamma_0, \quad \beta_2 = \gamma_2/\gamma_0.$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega_s} = \frac{d^2\sigma_{\text{классич}}}{d\omega_s} + \frac{d^2\sigma_{\text{интерф}}}{d\omega_s} = 2 \frac{d^2\sigma_{\text{классич}}}{d\omega_s}. \quad (30)$$

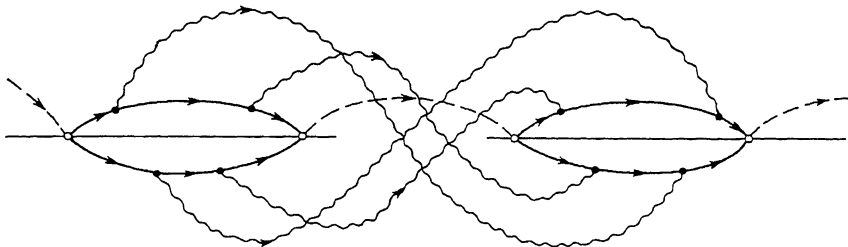


Рис. 5. Диаграмма, соответствующая интерференционному процессу МРКРС.

3. Анализ и пределы применимости полученного результата.

Более высокие порядки рассеяния

Результат (22)—(25) применим, если интеграл по модулю x из правой части (27) конечен. Для того чтобы убедиться в сходимости интеграла по x , нужно сначала выполнить интегрирование по углам из правой части (27) при больших значениях x . В результате мы получаем, что при $x \rightarrow \infty$ подынтегральное выражение пропорционально x^{-4} , т. е. интеграл по x сходится. Это означает, что действительно в интеграле по p существенны величины $p \simeq \lambda_0^{-1}$, как мы и предполагали выше.

Из (25) следует, что величина сечения пропорциональна α , поскольку $\lambda_0 \sim \alpha^{-1}$. Зависимость $\sigma \sim \alpha$ сохраняется и для более высоких порядков $N=6, 8, \dots$. При попытке применить описанный выше метод к случаю $N=2$ терпим неудачу, поскольку оказывается, что подынтегральное выражение пропорционально x^{-2} при больших значениях x , интеграл по x расходится. Это означает, что в случае $N=2$ существенны большие, чем λ_0^{-1} , значения $p \simeq \mathcal{N}$, т. е. значения порядка обратной длины волны электрона и дырки, и описанный выше метод вычисления величины сечения рассеяния, при котором заранее предполагается $p \ll \mathcal{N}$, не применим. Выше мы предполагали, что время жизни электрона и дырки в последнем состоянии перед излучательной аннигиляцией определяется возможностью реально испустить фотон. Легко видеть, что для выполнения этого предположения частота возбуждающего света должна быть достаточно большой, а именно:

$$\omega_i > \hbar^{-1}E_g + (N+2)\omega_{L0}, \quad (31)$$

где N — порядок рассеяния.

4. Физический смысл полученных результатов

Попытаемся выяснить, чем обусловлен рост интенсивности МРКРС при переходе от случая $m \neq m_h$ к случаю $m = m_h$. В [16] дано физическое истолкование зависимости $\sigma_N \sim \alpha^3$ при $N \geq 4$, $m \neq m_h$, состоящее в том, что сечение

рассеяния обратно пропорционально объему, занимаемому электронно-дырочной парой перед излучательной аннигиляцией этой пары. Объем $V_{ЭДП}$ остается конечным с момента рождения пары до момента аннигиляции, иначе вклад свободных электронов и дырок в интенсивность вторичного свечения был бы пропорционален квадрату их концентрации и был бы нелинеен, а квадратичен по интенсивности возбуждающего света. Конечный объем ЭДП обусловлен не кулоновским взаимодействием электрона и дырки, которым мы для простоты пренебрегаем, а взаимодействием с LO фононами. Пониманию последнего факта могут способствовать разделы 4 и 5 из [16].¹ В разделе 4 дана общая теория связи величин сечения МРКРС с пространственным распределением электронов и дырок. В разделе 5 распределение пар по относительному расстоянию между электроном и дыркой проиллюстрировано на простейшем примере для случая, когда эффективная масса дырки очень велика ($m_n \rightarrow \infty$), а масса электрона конечна. Количественные результаты, полученные вполне строго с использованием диаграммной техники, можно трактовать следующим образом. Электрон и дырка рождаются светом в одной точке, причем при большой массе дырки можно считать, что дырка не движется. Если бы электрон не рассеивался, то пространственная корреляция между ним и дыркой была бы утрачена. Однако возможность рассеяния, скажем, с испусканием LO фонона приводит к конечной вероятности возвращения электрона в точку рождения ЭДП. Вероятность возвращения остается конечной после испускания электроном любого числа N фононов, только уменьшается численно. Ясно, что объем пары измеряется в масштабе λ^3 , где λ — длина свободного пробега электрона. Отсюда получаем

$$V_{ЭДП} \sim \lambda^3 \sim \alpha^{-3}. \quad (32)$$

В случае неравных масс вычисление дает $\sigma_N \sim \alpha^3$ (при $N \geq 4$).

Надлежит выяснить, почему в случае равных масс получаем результат $\sigma_N \sim \alpha$. Воспользуемся формулой, связывающей величину сечения рассеяния с вероятностью \bar{W}_s испускания кванта вторичного излучения в единицу времени, нормированной на один фотон возбуждающего излучения. Согласно [20, 22], имеем²

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\omega_s} = \frac{V_0^2 n_s^2 \omega_s^2}{(2\pi)^3 c^2 u_s u_l} \bar{W}_s, \quad (33)$$

где u_l (u_s) — групповая скорость возбуждающего (рассеянного) света. Величина \bar{W}_s следующим образом связана с пространственным распределением электронов и дырок [16]:

¹ В [16] в формулах (15)–(17) и (20) допущена неточность. В правой части (15) множитель γ_n/\mathcal{E}_n должен быть заменен на $\gamma_n/\mathcal{E}_n - i(\hbar p/m) \cos \vartheta_n$ в правой части (16) множитель перед квадратными скобками должен быть записан как $\gamma_0/\mathcal{E}_0 - i(\hbar p/m) \cos \vartheta_0$ и $\gamma_N/\mathcal{E}_N - i(\hbar p/\mathcal{E}_j/m) \cos \vartheta_N$. В (17) все величины γ_j в числителях дробей должны быть заменены на $\gamma_j - i(2\hbar p \mathcal{E}_j/m) \cos \vartheta_j$. В (17) в отличие от (15), (16) и (20) совершена замена переменной $p = p/2$ и штрих у p' затем опущен.

Наконец, в (20) в числителе последней дроби в правой части следует читать $\gamma_i/\gamma_0 u_j - i x \cos \vartheta_j$. Легко убедиться в том, что величины (17) и (20) после таких исправлений остаются вещественными. Для этого достаточно произвести замену переменной интегрирования p на $-p$. Исправление формул не влияет ни на какие принципиальные результаты [16]. Заметим, что в случае модельного взаимодействия (см. (25) в [16]) мнимые добавки вида $(i\hbar p \mathcal{E}_j/m) \cos \vartheta_j$ могут быть опущены, так как дают нулевой вклад в тензор рассеяния в результате интегрирования по углам ϑ_j . Поэтому, в частности, все формулы раздела 5 не нуждаются в исправлении.

² Формуле (33) соответствует (62) из [16], но в [16] не учтена временная дисперсия света. Заметим, что влияние отличного от единицы показателя преломления среды рассеяния в конечном счете сводится только к присутствию множителя n_s/n_l в окончательной формуле (1) для сечения рассеяния.

$$\bar{W}_{sN} = V_0 F_N(\mathbf{r} = 0, \mathbf{K} = 0) \frac{2\pi}{\hbar} |M_s|^2 \delta(\hbar\omega_l - \hbar\omega_s - N\hbar\omega_{LO}), \quad (34)$$

где индекс N соответствует порядку рассеяния или числу испущенных LO фононов, $F_N(\mathbf{r}, \mathbf{K}) d^3r$ — число пар (нормированное на один фотон возбуждающего света) в объеме V_0 с радиусом-вектором, проведенным от электрона к дырке, в интервале от \mathbf{r} до $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, причем полный квазиимпульс пар равен $\hbar\mathbf{K}$ и число фононов, испущенных парами, равно N . Величина $|M_s|^2$ — квадрат матричного элемента, соответствующего излучательной аннигиляции пары. С учетом временной дисперсии света она равна

$$|M_s|^2 = \frac{2\pi\hbar}{V_0} \left(\frac{e}{m_0}\right)^2 |e_s \mathbf{p}_{cv}|^2 \frac{u_s}{\omega_s c n_s}. \quad (35)$$

Выделив три последних множителя из правой части (34), введем величину

$$\mathcal{W}_s = \frac{2\pi}{\hbar} |M_s|^2 \delta(\hbar\omega_l - \hbar\omega_s - N\hbar\omega_{LO}). \quad (35a)$$

В случае процесса, изображенного на рис. 1, воспользовавшись определением (19) абсолютной величины вектора \mathcal{K}_2 , можем использовать равенство

$$\hbar\omega_l - 4\hbar\omega_{LO} = E_g + 2 \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_2^2}{2m} \quad (36)$$

и записать \mathcal{W}_s в виде

$$\mathcal{W}_s = \frac{2\pi}{\hbar} |M_s|^2 \delta\left(E_g + 2 \frac{\hbar^2 \mathcal{K}_2^2}{2m} - \hbar\omega_s\right), \quad (37)$$

после чего ясен физический смысл величины \mathcal{W}_s . Это вероятность излучательной аннигиляции пары, т. е. число квантов вторичного излучения, испускаемых в единицу времени при наличии в объеме V_0 одной пары, причем волновые векторы электрона и дырки противоположно направлены и равны по модулю \mathcal{K}_2 . После этого мы можем переписать (34) в виде

$$\bar{W}_{sN} = V_0 F_N(\mathbf{r} = 0, \mathbf{K} = 0) \mathcal{W}_s. \quad (38)$$

Далее введем нормированную на единицу функцию распределения $f_N(\mathbf{r}, \mathbf{K})$ пар по относительному расстоянию \mathbf{r} между ними, определенную в [16] как

$$f_N(\mathbf{r}, \mathbf{K}) = \frac{F_N(\mathbf{r}, \mathbf{K})}{n_N(\mathbf{K})}, \quad (39)$$

причем

$$n_N(\mathbf{K}) = \int d^3r F_N(\mathbf{r}, \mathbf{K}) \quad (40)$$

— полное число пар в объеме V_0 с полным квазиимпульсом $\hbar\mathbf{K}$, испустивших N фононов. Соответственно имеем

$$\bar{W}_{sN} = n_N(\mathbf{K} = 0) V_0 f_N(\mathbf{r} = 0, \mathbf{K} = 0) \mathcal{W}_s. \quad (41)$$

Теперь ясен физический смысл выражения (41). Если бы пространственная корреляция электронов и дырок отсутствовала, то

$$f_N(\mathbf{r} = 0, \mathbf{K} = 0) = V_0^{-1},$$

и в выражении (41) и в соответствующей формуле для сечения рассеяния мы получили бы лишний множитель V_0^{-1} и результат для сечения стремился бы

к нулю. Это означало бы излучательную аннигиляцию электронов и дырок, расположенных в пространстве независимо друг от друга, что не дает линейного по интенсивности возбуждающего света вклада в интенсивность вторичного излучения.

В действительности величина $f_N(\mathbf{r}=0, \mathbf{K}=0)$ измеряется в масштабе λ^{-3} , что и означает конечный объем пары и конечный вклад в сечение рассеяния процессов с участием свободных ЭДП.

Займемся сначала вычислением числа пар $n_N(\mathbf{K}=0)$. Введем в рассмотрение Фурье-образ $\mathcal{F}_N(\mathbf{p}, \mathbf{K})$ функции $F_N(\mathbf{r}, \mathbf{K})$, определенный как

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{p}, \mathbf{K}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} F_N(\mathbf{r}, \mathbf{K}). \quad (42)$$

Тогда из (42) и определения (40) получаем

$$n_N(\mathbf{K}) = \mathcal{F}_N(\mathbf{p}=0, \mathbf{K}). \quad (43)$$

Полное число пар, испустивших N фононов, равно

$$n_N = \sum_{\mathbf{K}} n_N(\mathbf{K}). \quad (44)$$

Для вычисления $\mathcal{F}_N(\mathbf{p}, \mathbf{K})$ разработана диаграммная методика, правила которой изложены в [16]. Диаграммы отличаются от диаграмм для тензора рассеяния света (рис. 2) отсутствием светлых точек с индексами α и β , соответствующих аннигиляции пары. Вместо этих точек имеются четыре свободных конца электронных и дырочных линий [16]. Как видно из (43), при подсчете числа пар следует полагать $\mathbf{p}=0$, и это значительно упрощает вычисления. При $\mathbf{p}=0$ в случае симметричных диаграмм, описывающих классические процессы, паре вертикальных сечений, симметрично расположенных в правой и левой частях диаграммы,³ соответствует множитель

$$L = (\Delta E + i\hbar\Gamma/2)^{-1} (\Delta E - i\hbar\Gamma/2)^{-1}, \quad (45)$$

где $\Delta E = \hbar\omega_l - E_{\text{полн}}$ — разность начальной энергии, равной $\hbar\omega_l$, и полной энергии системы в данной сечении; Γ — полное обратное время жизни системы в данном сечении. Множитель (45) в наименьшем порядке по параметру $\hbar\Gamma/E$ можно аппроксимировать как

$$L \simeq \frac{2\pi}{\hbar\Gamma} \delta(\Delta E). \quad (46)$$

Выражение (46) описывает сохранение энергии при переходе системы через промежуточные состояния и облегчает интегрирование по абсолютным величинам волновых векторов электронов и дырок в этих состояниях. С использованием (46) проще всего вычислить полное число пар, испустивших заданное число фононов N . Например, для процессов, изображенных на рис. 2, получаем сумму шести классических вкладов от квадратов модулей амплитуд типа A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 (см. рис. 3, на котором правые вершины, соответствующие излучательной аннигиляции пар, должны отсутствовать). Первый из этих вкладов, соответствующий квадрату модуля $|A_1|^2$ и описывающий процесс, при котором два первых фонона испускаются электроном, а два последних — дыркой, оказывается равным

³ Речь идет о диаграммах и соответствующих им выражениях после взятия интегралов по частотам, когда применимо «правило сечений».

$$n_4^1 = \frac{\mathcal{W}_l}{\gamma(\mathcal{K}_0) + \gamma_h(\mathcal{K}_0)} \frac{\gamma(\mathcal{K}_0)}{\gamma(\mathcal{K}_1) + \gamma_h(\mathcal{K}_0)} \frac{\gamma(\mathcal{K}_1)}{\gamma(\mathcal{K}_2) + \gamma_h(\mathcal{K}_0)} \frac{\gamma_h(\mathcal{K}_0)}{\gamma(\mathcal{K}_2) + \gamma_h(\mathcal{K}_3)} \frac{\gamma_h(\mathcal{K}_3)}{\gamma(\mathcal{K}_2) + \gamma_h(\mathcal{K}_1)}, \quad (47)$$

где

$$\mathcal{W}_l = \frac{V_0}{\pi} \frac{\mu \mathcal{K}_0}{\hbar^3} |M_l|^2 \quad (48)$$

— число пар, рождаемых в единицу времени в объеме V_0 светом с частотой ω_l при нормировке на один фотон возбуждающего излучения; $|M_l|^2$ определено в (35), если заменить индекс s на l ; модули векторов \mathcal{K}_0 , \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 и \mathcal{K}_3 приведены в (12)

$$\mathcal{K}_4 = \sqrt{(2\mu/\hbar)(\omega_{\text{нач}} - 2m_h\omega_{l,0}/\mu)}, \quad (49)$$

величина обратного времени жизни электрона определяется выражением

$$\gamma(\mathcal{K}_0) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}_1} |C_{\mathcal{K}_0-\mathbf{k}_1}|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 \mathcal{K}_0^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} - \hbar\omega_{l,0}\right) = \frac{V_0 m \mathcal{K}_0^2}{\pi \hbar^3} \int \frac{d\omega_{\mathcal{K}_1}}{4\pi} |C_{\mathcal{K}_0-\mathcal{K}_1}|^2. \quad (50)$$

Формула (47) применима при любом соотношении масс электрона и дырки при условии, что подкоренные выражения в (12) и (49) положительны. Эта формула описывает классический процесс с сохранением энергии на каждом этапе. Физический смысл ее совершенно ясен. Аналогичные выражения могут быть получены для вкладов всех других процессов, не только описываемых квадратами модулей амплитуд A_2 , A_3 , A_4 , A_5 и A_6 , но и для тех, где три или четыре фонона испускаются электроном и дыркой. Величина

$$n_4 \sim \alpha^{-1}. \quad (51)$$

Теперь вычислим число пар с фиксированным (равным нулю) суммарным волновым вектором в конечном состоянии. В этом случае результаты получаются различными при $m \neq m_h$ и $m = m_h$. Например, вклад в $n_4(\mathbf{K}=0)$ одного из процессов, соответствующих $|A_1|^2$, а именно прямого рождения пары и непрямой аннигиляции при $m \neq m_h$ оказывается равным

$$n_{4 \text{ ind. ann}}(\mathbf{K}=0) = \frac{\mathcal{W}_l}{\Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} \frac{m^2 m_h V_0^3 \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \mathcal{K}_3}{(\Delta E)^2 \pi^3 \hbar^9} (4\pi)^{-3} \int d\omega_{\mathcal{K}_1} \int d\omega_{\mathcal{K}_2} \int d\omega_{\mathcal{K}_3} |C_{\mathcal{K}_0-\mathcal{K}_1}|^2 \times \\ \times |C_{\mathcal{K}_1-\mathcal{K}_2}|^2 |C_{\mathcal{K}_2-\mathcal{K}_3}|^2 |C_{\mathcal{K}_3-\mathcal{K}_0}|^2, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \gamma(\mathcal{K}_0) + \gamma_h(\mathcal{K}_0), \\ \Gamma_1 &= \gamma(\mathcal{K}_1) + \gamma_h(\mathcal{K}_0), \\ \Gamma_2 &= \gamma(\mathcal{K}_2) + \gamma_h(\mathcal{K}_0), \\ \Gamma_3 &= \gamma(\mathcal{K}_2) + \gamma_h(\mathcal{K}_3), \end{aligned} \quad (53)$$

величина ΔE определена в (14). Интегрирование по углам в (52) выполнить затруднительно, поскольку каждый из векторов \mathcal{K}_0 , \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 и \mathcal{K}_3 встречается в подынтегральном выражении по два раза.⁴

Для наглядности покажем, во что преобразуется (52) для простейшей модели, когда вместо истинного фрёлиховского взаимодействия (2а) используем взаимодействие $C^{(2)}$, не зависящее от величины волнового вектора фонона (см. [16]). Тогда имеем

⁴ При вычислении полного числа пар n_4 эта трудность не возникает, так как последний множитель в правой части (52) заменяется на $|C_{\mathcal{K}_3-\mathcal{K}_1}|^2$ и по углам \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_3 и т. д. последовательно производится интегрирование.

$$n_{4\text{ind. ann}}^{z1}(\mathbf{K}=0) = \frac{\mathcal{W}_I}{\gamma(\mathcal{X}_0) + \gamma_h(\mathcal{X}_0)} \frac{\gamma(\mathcal{X}_0)}{\gamma(\mathcal{X}_1) + \gamma_h(\mathcal{X}_0)} \frac{\gamma(\mathcal{X}_1)}{\gamma(\mathcal{X}_2) + \gamma_h(\mathcal{X}_0)} \times \\ \times \frac{\gamma_h(\mathcal{X}_0)}{\gamma(\mathcal{X}_2) + \gamma_h(\mathcal{X}_0)} \frac{|C^{(Z)}|^2}{(\Delta E)^2}. \quad (54)$$

Физический смысл результатов (52)—(54) также совершенно ясен. Последний множитель в правой части (54) описывает переход через виртуальное состояние системы, необходимый для достижения состояния пары с суммарным квазиимпульсом $\mathbf{K}=0$.

Величина (54) нулевого порядка во фрёлиховской константе α и по сравнению с (47) содержит дополнительный множитель V_0^1 .

Далее вычислим число пар с $\mathbf{K}=0$ в случае $m=m_h$. Заранее ясно, что результат (52) неприменим, поскольку при равных массах $\Delta E=0$. Получаем, что, например, вклад одного из процессов, соответствующих $|A_1|^2$ (рис. 3), равен

$$n_{i, m=m_h}^1(\mathbf{K}=0) = \frac{\mathcal{W}_I}{\Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2^3 \Gamma_3 \Gamma_4'} \frac{m^3 V_0^3 \mathcal{X}_1^3 \mathcal{X}_2}{\pi^3 \hbar^{11}} (4\pi)^{-3} \int d\mathcal{O}_{\mathcal{X}_1} \int d\mathcal{O}_{\mathcal{X}_2} \int d\mathcal{O}_{\mathcal{X}_3} |C_{\mathcal{X}_0-\mathcal{X}_1}|^2 \times \\ \times |C_{\mathcal{X}_1-\mathcal{X}_2}|^2 |C_{\mathcal{X}_2-\mathcal{X}_3}|^2 |C_{\mathcal{X}_3-\mathcal{X}_0}|^2, \quad (55)$$

где в дополнение к предыдущим введено обозначение

$$\Gamma_4' = 2\gamma(\mathcal{X}_2) = 2\gamma_2.$$

Сравнивая (55) с (52), видим, что множитель $(\Delta E)^2$ в знаменателе (52) заменяется на множитель $\hbar^2 \Gamma_2 \Gamma_4'$. В соответствии с этим величина $n_{i, m=m_h}^1(\mathbf{K}=0)$ пропорциональна α^{-2} .

Причина увеличения интенсивности МРКРС при равных эффективных массах электрона и дырки заключена именно в этом пункте, т. е. в увеличении числа пар $n_4(\mathbf{K}=0)$ за счет множителя порядка α^{-2} . Что касается величины $f_N(\mathbf{r}=0, \mathbf{K}=0)$ в правой части (41), то порядок ее не меняется при переходе от случая $m \neq m_h$ к случаю равных масс. Эта величина остается обратно пропорциональной объему пары, который в трехмерном случае порядка $\lambda^3 \sim \alpha^{-3}$.

В заключение отметим, что включение сильного магнитного поля должно приводить к переходу к зависимости

$$\sigma_N \sim \alpha^{-1} \quad (56)$$

в случае равных эффективных масс электрона и дырки [23, 24], что означает увеличение интенсивности МРКРС в α^{-2} раз, а по сравнению со случаем нулевого магнитного поля и неравных масс — всего в α^{-4} раз. Переход к отрицательной степени α в (56) не должен вызывать недоумения, поскольку подразумевается, что фрёлиховское взаимодействие с LO фононами в полярных полупроводниках превосходит по силе все прочие взаимодействия электронов и дырок с другими объектами в кристалле, например с акустическими фононами, примесями и т. д. Усиление МРКРС в сильном магнитном поле было теоретически предсказано в [25–28] и экспериментально обнаружено в [29]. При любом соотношении эффективных масс электрона и дырки понижение порядка величины сечения σ_N по α на два при включении сильного магнитного поля связано с переходом от трехмерного движения электронов и дырок к квазиодномерному и с соответствующим изменением зависимости объема пары от α (при $H=0$ $V_{\text{эдп}} \sim \alpha^{-3}$, при $H \neq 0$ в сильном поле $V_{\text{эдп}} \sim \alpha^{-1}$). Подчеркнем еще раз, что причина усиления МРКРС при переходе от случая $m \neq m_h$ к $m=m_h$ иная — резкое увеличение числа пар с равным нулю суммарным квазиимпульсом, способным к излучательной аннигиляции.

- [1] Leite R. C. C., Porto S. P. S. // *Phys. Rev. Lett.* 1966. V. 17. N 1. P. 10—12.
 [2] Leite R. C. C., Scott J. F., Damen T. C. // *Phys. Rev. Lett.* 1969. V. 22. N 15. P. 780—782.
 [3] Scott J. F., Leite R. C. C., Damen T. C. // *Phys. Rev.* 1969. V. 188. N 3. P. 1285—1290.
 [4] Nakamura K., Ohno N., Yoshida M., Nakai Y. // *Sol. St. Commun.* 1980. V. 36. N 1. P. 211—214.
 [5] Yoshida M., Watanabe H., Ohno N., Mitsutaka H., Nakamura K., Nakai Y. // *J. Luminescence.* 1984. V. 31/32. Pt 1. P. 488—490.
 [6] Yoshida M., Ohno N., Mitsutaka H., Nakamura K., Nakai Y. // *J. Phys. Soc. Japan.* 1985. V. 54. N 7. P. 2754—2761.
 [7] Ohno N., Yoshida M., Nakamura K., Nakai Y. // *Sol. St. Commun.* 1985. V. 53. N 7. P. 569—572.
 [8] Генкин В. М. // *ЖЭТФ.* 1970. Т. 58. № 6. С. 2005—2011.
 [9] Клочихин А. А., Пермогоров С. А., Резницкий А. Н. // *ЖЭТФ.* 1976. Т. 71. № 6. С. 2230—2251.
 [10] Рiera P., Сотолонго Коста О., Траллери Гинер К., Ланг И. Г., Павлов С. Т. // *ФТТ.* 1989. Т. 31. № 8. С. 83—88.
 [11] Ланг И. Г., Павлов С. Т., Сотолонго Коста О. // *ФТТ.* 1990. Т. 32. № 11. С. 3453—3456.
 [12] Клочихин А. А., Плюхин А. Г. // *Письма ЖЭТФ.* 1975. Т. 21. № 5. С. 267—270.
 [13] Bendow B. // *Proc. first USSR—USA symp. «The theory of light scattering in solids» / Ed. V. M. Agranovich, J. L. Birman. Moscow: Nauka, 1976. V. 1. P. 328—351.*
 [14] Траллери Гинер К., Ланг И. Г., Павлов С. Т. // *ФТТ.* 1981. Т. 23. № 5. С. 1265—1275.
 [15] Zeyher R. // *Sol. St. Commun.* 1975. V. 16. N 1. P. 49—55.
 [16] Geltsev A. V., Lang I. G., Pavlov S. T., Bryzhina M. F. // *J. Phys. C. Solid State Phys.* 1983. V. 16. N 21. P. 4221—4241.
 [17] Trallero Giner C., Riera R. // *Proc. II Int. Conf. Raman Spectroscopy. / Ed. R. J. H. Clark, D. A. Long. London, 1988. P. 319—320.*
 [18] Trallero Giner C., Riera R. // *Phys. Stat. Sol. b.* 1989. V. 152. P. 357—367.
 [19] Ивченко Е. Л., Ланг И. Г., Павлов С. Т. // *ФТТ.* 1977. Т. 19. № 9. С. 1751—1759.
 [20] Lang I. G., Pavlov S. T., Prokaznikov A. V., Goltsev A. V. // *Phys. Stat. Sol. b.* 1985. V. 127. N 1. P. 187—200.
 [21] Frohlich H. // *Adv. Phys.* 1954. V. 3. N 11. P. 325—361.
 [22] Ланг И. Г., Павлов С. Т., Проказников А. В., Гольцев А. В. // *Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР.* 1984. № 866.
 [23] Белицкий В. И., Ланг И. Г., Павлов С. Т. // *ФТТ.* 1991. Т. 33. № 2. С. 517—520.
 [24] Belitsky V. I., Lang I. G., Pavlov S. T. // *Physica B.* 1991. V. 172. P. 452—458.
 [25] Белицкий В. И., Гольцев А. В., Ланг И. Г., Павлов С. Т. // *ФТТ.* 1983. Т. 25. № 4. С. 1224—1226.
 [26] Белицкий В. И., Гольцев А. В., Ланг И. Г., Павлов С. Т. // *ЖЭТФ,* 1984. Т. 86. № 1. С. 272—286.
 [27] Belitsky V. I., Goltsev A. V., Lang I. G., Pavlov S. T. *Phys. Stat. Sol. b.* 1984. V. 122. N 2. P. 581—590.
 [28] Белицкий В. И., Гольцев А. В., Ланг И. Г., Павлов С. Т. // *ФТТ.* 1984. Т. 26. № 7. С. 2182—2185.
 [29] Ruf T., Cardona M. // *Phys. Rev. Lett.* 1989. V. 63. N 20. P. 2288—2290.

Физико-технический институт
 им. А. Ф. Иоффе РАН
 Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
 17 июня 1991 г.
 В окончательной редакции
 24 сентября 1991 г.