1991 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 33, № 11
1991 SOLID STATE PHYSICS Vol. 33, N 11

УДК 537.311

О НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЯХ ПРИ АНОМАЛЬНОМ СКИН-ЭФФЕКТЕ В НУЛЕВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. П. Копасов

Получено асимптотически точное в условиях аномального скин-эффекта выражение для тензора нелинейной проводимости третьего ранга $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ ($\mathbf{k}_1$, ω_1; $\mathbf{k}_2$, ω_2) проводника с произвольным законом дисперсии при учете Ферми-жидкостного взаимодействия и не зависящего от спина рассеяния электронов на примесях в случае, когда $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$, где ω_1, ω_2 и $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ — частоты и волновые векторы электромагнитных волн. Показано, что при вычислении вклада в нелинейную проводимость, связанного с магнитным полем волны $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(H)}$, вообще говоря, нельзя ограничиваться τ-приближением, а следует принимать во внимание и приходный член в интеграле столкновений. Вычислен также тензор четвертого ранга $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Обсуждается генерация третьей гармоники при отражении электромагнитной волны от проводника, которая может быть более эффективна, чем генерация второй, даже в случае сильной анизотропии закона дисперсии.

Линейная проводимость и поверхностный импеданс проводника при аномальном скин-эффекте в нулевом магнитном поле не зависят от Ферми-жидкостного взаимодействия в основном приближении по аномальности (см., например [1-3]). В работе автора [4] было показано, что в нелинейную проводимость третьего ранга $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ Ферми-жидкостное взаимодействие тем не менее дает существенный вклад. В [4] была также дана оценка амплитуды генерируемой второй гармоники при отражении электромагнитной волны от анизотропного проводника. Однако результаты работы [4] нуждаются в некотором уточнении. В данной работе учтены не все вклады в тензор $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$. В частности, это связано с тем, что в [4] использовалось τ-приближение с временем релаксации $\tau = \tau(\mathbf{p})$, где $\mathbf{p}$ — квазиимпульс.

В линейной теории в силу аномальности скин-эффекта τ-приближение является, как хорошо известно, строго обоснованным и под $\tau(\mathbf{p})$ следует понимать уходное время релаксации [1-3, 5]. В нелинейном приближении, как оказывается, на частотах, меньших частоты столкновений, необходимо, вообще говоря, учитывать приходный член в интеграле столкновений. В настоящей работе получено асимптотически точное в условиях аномального скин-эффекта выражение для тензора нелинейной проводимости третьего ранга проводника с произвольным законом дисперсии при учете Ферми-жидкостного взаимодействия и не зависящего от спина рассеяния электронов на примесях. Вычислен также тензор нелинейной проводимости четвертого ранга. Показано, что при отражении электромагнитной волны от проводника генерация третьей гармоники даже в случае большой анизотропии закона дисперсии и слабой нелинейности может быть более эффективна, чем генерация второй.

Итак, пусть электромагнитное поле в безграничном проводнике имеет вид

$$\mathbf{E}(y,\ t) = \mathbf{E}(k_1)\exp\{ik_1y - i\omega_1t\} + \mathbf{E}(k_2)\exp\{ik_2y - i\omega_2t\} + \text{к. с.},$$
$$\mathbf{H}(y,\ t) = \mathbf{H}(k_1)\exp\{ik_1y - i\omega_1t\} + \mathbf{H}(k_2)\exp\{ik_2y - i\omega_2t\} + \text{к. с.} \qquad (1)$$

Найдем нелинейный ток $j_\alpha^{(2)}(y, t)$ на частоте $\omega=\omega_1+\omega_2$

$$j_\alpha^{(2)}(y, t)=j_\alpha^{(2)}(k, \omega)\exp\{iky-i\omega t\}+\text{к. с.}, \quad k=k_1+k_2. \tag{2}$$

Тензор нелинейной проводимости $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ $(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2)$ определим соотношением

$$j_\alpha^{(2)}(k, \omega)=\hat{P}(\omega_1, k_1, \beta; \omega_2, k_2, \gamma)\,\sigma_{\alpha\beta\gamma}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2)\,E_\beta(k_1)\,E_\gamma(k_2), \tag{3}$$

где $\hat{P}$ $(\omega_1, k_1, \beta; \omega_2\, k_2, \gamma)$ — оператор симметризации по частотам, волновым векторам и векторным индексам (сумма по перестановкам).

Представим тензор $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ в виде

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2)=\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(E)}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2)+\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(H)}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2), \tag{4}$$

где $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(E)}$ есть вклад в нелинейную проводимость, обусловленный только силой электрического поля в кинетическом уравнении, а $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(H)}$ — вклад, обусловленный как силой электрического, так и магнитного полей.

В [4] показано, что при $\omega_{1,\,2}\tau \gg 1$ тензоры $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(E)}$ и $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(H)}$, вообще говоря, одного порядка. Здесь мы рассмотрим только $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(H)}$, поскольку полученное в [4] выражение для $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(E)}$ (формулы (21), (22)) является асимптотически точным (при его выводе τ-приближение оказывается, как и в линейной теории, оправданным). Чтобы упростить изложение, не будем пока учитывать Ферми-жидкостное взаимодействие. Кинетическое уравнение для функции распределения электронов f запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial r}+e\left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}(\mathbf{r}, t)]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=\hat{I}f, \tag{5}$$

где $\hat{I}f$ — интеграл столкновений. При не зависящем от спина рассеянии электронов на примесях для $\hat{I}f$ имеем

$$\hat{I}f=-\int d\tau_{\mathbf{p}'}W(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\,\delta(\varepsilon(\mathbf{p})-\varepsilon(\mathbf{p}'))\,(f(\mathbf{p})-f(\mathbf{p}'))=-f(\mathbf{p})/\tau(\mathbf{p})+\hat{I}f, \tag{6}$$

$$\tau^{-1}(\mathbf{p})=\int d\tau_{\mathbf{p}'}W_{\iota}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\,\delta(\varepsilon(\mathbf{p})-\varepsilon(\mathbf{p}')),$$

$$d\tau_{\mathbf{p}}=2d^3\mathbf{p}/(2\pi)^3, \quad W(\mathbf{p}, \mathbf{p}')=W(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \; W(\mathbf{p}, \mathbf{p}')=W(-\mathbf{p}, -\mathbf{p}').$$

В условиях аномального скин-эффекта учет приходного члена в интеграле столкновений приводит к появлению лишь малых поправок к функции распределения (в случае чисто поперечных полей), которые, однако, как будет видно из дальнейшего, оказываются существенными при вычислении тензора $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(H)}$.

Рассмотрим сначала τ-приближение, т. е. отбросим приходный член в интеграле столкновений. Тогда, решая кинетическое уравнение (5) методом итераций по амплитуде полей, нетрудно получить следующее выражение:

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(H)}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2)=-\frac{2}{(2\pi)^3}\frac{e^3k_2}{\omega_2}\int\limits_{\varepsilon=\varepsilon_F}\frac{d\Omega}{vK(\varphi, Q)}\frac{v_\beta}{k_1v_y-\omega_1-i\tau^{-1}}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial p_\mu}\left(\frac{v_\alpha v_\gamma\delta_{\mu y}-v_\alpha v_y\delta_{\mu\gamma}}{kv_y-\omega-i\tau^{-1}}\right), \tag{7}$$

где ε_F — энергия Ферми, v — модуль скорости, K (φ, Q) — гауссова кривизна поверхности Ферми, φ и Q — азимутальный и полярный углы вектора нормали к поверхности Ферми (полярная ось совпадает с осью y), $d\Omega=\sin Q dQ d\varphi$ — элемент телесного угла.

Нам необходимо вычислить интеграл (7) в условиях аномального скин-эффекта, когда выполнены неравенства

$$kv_F,\ k_{1,2}v_F \gg \omega_{1,2},\ \tau^{-1}, \tag{8}$$

где v_F — скорость Ферми. Удобно сначала выполнить интегрирование по Q, а затем по φ. При выполнении неравенств (8) подынтегральное выражение в (7) как функция переменой $z=\cos Q$ имеет два полюса вблизи точки $z=0$. Существенный вклад в интеграл возникает только тогда, когда полюсы лежат по разные стороны от действительной оси, т. е. когда $kk_1 < 0$ [4]. Данный вклад легко может быть вычислен по теории вычетов. Однако он в основном приближении по аномальности зануляется после интегрирования по φ, так как

$$\int\limits_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_F \\ Q=\pi/2}} \frac{d\varphi}{vK(\varphi,\ Q)} v_\alpha v_\beta v_\gamma \equiv 0, \tag{9}$$

в силу четности закона дисперсии электронов в металлах: $\varepsilon(\mathbf{p})=\varepsilon(-\mathbf{p})$. При вычислении $\sigma^{(E)}_{\alpha\beta\gamma}$ (см. [4]) такого зануления не происходит, так как сила электрического поля не зависит от квазиимпульса.

Отмеченное обстоятельство имеет два важных следствия. Во-первых, несмотря на то что при аномальном скин-эффекте действующая на эффективные электроны сила магнитного поля много больше силы электрического поля, тензоры $\sigma^{(E)}_{\alpha\beta\gamma}$ и $\sigma^{(H)}_{\alpha\beta\gamma}$ при $\omega_{1,2}\tau \gg 1$, вообще говоря, одного порядка (это было показано в [4]). Во-вторых, существенный вклад в $\sigma^{(H)}_{\alpha\beta\gamma}$ могут вносить Ферми-жидкостное взаимодействие, а также приходный член в интеграле столкновений. Действительно, из вышесказанного ясно, что небольшие поправки к функции распределения, которые на «пояске эффективности» $v_y=0$ $(Q=\pi/2)$ имеют относительно инверсии $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ четность, противоположную четности функции основного приближения, могут быть существенны при вычислении тензора $\sigma^{(H)}_{\alpha\beta\gamma}$. Именно такого вида поправки и возникают при учете приходного члена в интеграле столкновений и Ферми-жидкостного взаимодействия. В этом нетрудно убедиться. Рассмотрим для простоты влияние на функцию распределения приходного члена в интеграле столкновений. Поправку к функции распределения, линейную по полю, запишем в виде

$$f_1(\mathbf{p},\ k_1)\exp\{ik_1y - i\omega_1t\} + f_1(\mathbf{p},\ k_2)\exp\{ik_2y - i\omega_2t\} + \text{к. с.} \tag{10}$$

Для $f_1(\mathbf{p},\ k_1)$ из (5) и (6) получаем уравнение

$$i(k_1v_y - \omega_1 - i\tau^{-1}(\mathbf{p}))f_1(\mathbf{p},\ k_1) - \hat{I}_{\text{пр}}f_1 = -e\mathbf{E}(k_1)\mathbf{v}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}, \tag{11}$$

где f_0 — равновесная функция распределения. В силу аномальности скин-эффекта уравнение (11) можно решать методом итераций по приходному члену. В первом приближении, что является для нас достаточным, из (11) получаем

$$f_1(\mathbf{p},\ k_1) = \frac{i}{k_1v_y - \omega_1 - i\tau^{-1}}\left\{e\mathbf{E}(k_1)\mathbf{v}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} - \right.$$
$$\left. - \int d\tau_{\mathbf{p}'}W(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}'))\frac{ie\mathbf{E}(k_1)\mathbf{v}'}{k_1v'_y - \omega_1 - i\tau^{-1}(\mathbf{p}')}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon'}\right\}. \tag{12}$$

Видно, что в нулевом приближении по приходному члену $f_1(\mathbf{p},\ k_1)$ является нечетной функцией квазиимпульса на «пояске» $v_y=0$ (в случае поперечного электрического поля). Поправка первого приближения содержит как нечетную, так и четную по $\mathbf{p}$ на «пояске» $v_y=0$ части. Как следует из (12), четную при $v_y=0$ часть функции $f_1(\mathbf{p},\ k_1)$ можно представить в виде

$$f_1^{(\text{чет})}(\mathbf{p},\ k_1) = \frac{1}{k_1v_y - \omega_1 - i\tau^{-1}}\int d\tau_{\mathbf{p}'}W(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}'))\frac{e\mathbf{E}(k_1)\mathbf{v}'}{k_1v'_y}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon'}. \tag{13}$$

Особенность $v'_y=0$ в (13) интегрируется в смысле главного значения.

Аналогичным образом следует решать кинетическое уравнение для нелинейной поправки к функции распределения, учитывая одну итерацию по приходному члену, после чего можно вычислить тензор $\sigma^{(H)}_{\alpha\beta\gamma}$. Мы не будем пока выписывать выражение для $\sigma^{(H)}_{\alpha\beta\gamma}$. Далее оно будет приведено с учетом Ферми-жидкостных эффектов, к рассмотрению которых мы и перейдем.

Интеграл столкновений при рассеянии квазичастиц на примесях имеет вид

$$\hat{I}n(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t) = -\int d\tau_{\mathbf{p}'} W(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\delta(\varepsilon(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t) - \varepsilon(\mathbf{p}',\ \mathbf{r},\ t)) \times \times (n(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t) - n(\mathbf{p}',\ \mathbf{r},\ t)), \tag{14}$$

где $n(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t)$ — функция распределения квазичастиц; $\varepsilon(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t)$ — энергия квазичастиц, являющаяся, согласно теории Ферми-жидкости Ландау, функционалом от функции распределения n. Таким образом, в отличие от (6) интеграл столкновений (14) является нелинейным функционалом от функции распределения квазичастиц. Однако анализ показывает, что в условиях аномального скин-эффекта нелинейность, вносимая интегралом столкновений (14), несущественна. Поэтому мы сразу линеаризуем интеграл столкновений (14) по отклонению функции распределения от равновесной Δn

$$\Delta n = n(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t) - n_0(\varepsilon_0(\mathbf{p})), \tag{15}$$

где $\varepsilon_0(\mathbf{p})$ — равновесный закон дисперсии.

После некоторых преобразований линеаризованный интеграл столкновений можно записать следующим образом:

$$\hat{I}n(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t) = -\frac{\Delta\tilde{n}(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t)}{\tau(\mathbf{p})} + \int d\tau_{\mathbf{p}'} W(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\Delta\tilde{n}(\mathbf{p}',\ \mathbf{r},\ t)\,\delta(\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \varepsilon_0(\mathbf{p}')) = = -\frac{\Delta\tilde{n}(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t)}{\tau(\mathbf{p})} + \hat{I}_{\text{пр}}\Delta\tilde{n}(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t), \tag{16}$$

$$\tau^{-1}(\mathbf{p}) = \int d\tau_{\mathbf{p}'} W(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\delta(\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \varepsilon_0(\mathbf{p}')),$$

$$\Delta\tilde{n}(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t) = (1 + \hat{f})\,\Delta n(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t) = = \Delta n(\mathbf{p},\ \mathbf{r},\ t) - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0}\int d\tau_{\mathbf{p}'} f(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\Delta n(\mathbf{p}',\ \mathbf{r},\ t).$$

Ферми-жидкостное взаимодействие приводит к появлению в кинетическом уравнении слагаемых с интегральным оператором $\hat{G}$

$$\hat{G} = \hat{f}(1 + \hat{f})^{-1} = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0}\int d\tau_{\mathbf{p}'} G(\mathbf{p},\ \mathbf{p}'), \tag{17}$$

где $G(p,\ p')$ — корреляционная функция, введенная в [6].

Мы не будем здесь выписывать уравнения для линейных и нелинейных поправок к функции распределения квазичастиц. Они могут быть получены из уравнений (15) и (17) работы [4] соответственно путем замены в их левых частях τ^{-1} на $\tau^{-1} + \hat{I}_{\text{пр}}$. (В уравнении (17), вообще говоря, изменяется и правая часть, однако эти изменения несущественны. По-прежнему в правой части (17) достаточно учесть только второе, третье и четвертое слагаемые. При вычислении $\sigma^{(H)}_{\alpha\beta\gamma}$ учитывается, очевидно, только четвертое слагаемое). Из вышесказанного ясно, что в левых частях получаемых таким образом уравнений интегральные слагаемые, обусловленные Ферми-жидкостным взаимодействием и приходным членом в операторе столкновений отбрасывать нельзя. Их следует учесть методом итераций, ограничиваясь первой итерацией. После нахождения нелинейной поправки к функции распределения по формуле (20) работы [4] вычисляется нелинейный ток (в (20) опять существенно лишь первое слагаемое) и получается выражение для тензора $\sigma^{(H)}_{\alpha\beta\gamma}$. Его можно представить в виде

$$\sigma^{(H)}_{\alpha\beta\gamma}(k_1,\ \omega_1;\ k_2,\ \omega_2) = -i\,\frac{e^3}{2\pi^2}\,\frac{\Theta(-kk_1)}{k\,|k_1|}\,\frac{k_2}{\omega_2}\times$$

$$\times\int\limits_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_F\\ Q=\pi/2}}\left\{\frac{d\varphi}{v^2}\left\{\frac{\partial v_\alpha}{\partial p_y}\,\frac{v_\beta v_\gamma}{K(\varphi)}\,\frac{1}{\left(\dfrac{\omega_1+i\tau^{-1}}{k_1}-\dfrac{\omega+i\tau^{-1}}{k}\right)}+\frac{v_\alpha v_\beta v_\gamma}{v^2}\,\frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{v}{K(\varphi,\ Q)}\,\frac{\partial v_y}{\partial p_y}\right)\times\right.\right.$$

$$\times\frac{\left(\dfrac{\omega_1+i\tau^{-1}}{k_1}\right)}{\left(\dfrac{\omega_1+i\tau^{-1}}{k_1}-\dfrac{\omega+i\tau^{-1}}{k}\right)^2}+\frac{v_\alpha v_\beta}{K(\varphi)}\,\frac{\partial v_y}{\partial p_\gamma}\,\frac{\left(\dfrac{\omega_1+i\tau^{-1}}{k_1}\right)}{\left(\dfrac{\omega_1+i\tau^{-1}}{k_1}-\dfrac{\omega+i\tau^{-1}}{k}\right)^2}+$$

$$+\frac{v_\gamma}{K(\varphi)}\,\frac{\partial v_y}{\partial p_y}\,(ia_\alpha(\mathbf{p})\,v_\beta/(k\tau)+b_\alpha(\mathbf{p})\,v_\beta\omega/k+ia_\beta(\mathbf{p})\,v_\alpha/(k_1\tau)+v_\alpha b_\beta(\mathbf{p})\,\omega_1/k_1\times$$

$$\left.\left.\times\frac{1}{\left(\dfrac{\omega_1+i\tau^{-1}}{k_1}-\dfrac{\omega+i\tau^{-1}}{k}\right)^2}\right\}\right\};\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma=x,\ z, \tag{18}$$

$$a_\alpha(\mathbf{p})=\tau(\mathbf{p})\int d\tau_{\mathbf{p}'}W(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\delta\left(\varepsilon(\mathbf{p}')-\varepsilon_F\right)\frac{v'_\alpha}{v'_y},$$

$$b_\alpha(\mathbf{p})=\int d\tau_{\mathbf{p}'}G(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\frac{v'_\alpha}{v'_y}\,\frac{\partial n_0(\varepsilon'_0)}{\partial\varepsilon'_0},$$

$$G(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')=G(-\mathbf{p},\ -\mathbf{p}'),$$

$$K(\varphi)=K(\varphi,\ \pi/2),\ v_\alpha\,\frac{\partial\varepsilon_0(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha},$$

$\Theta(k)$ — тэта-функция. Особенности $v'_y=0$ в выражениях для $a_\alpha(\mathbf{p})$ и $b_\alpha(\mathbf{p})$ интегрируются в смысле главного значения. Видно, что $a_\alpha(\mathbf{p})=a_\alpha(-\mathbf{p})$, $b_\alpha(\mathbf{p})=b_\alpha(-\mathbf{p})$ и что на поверхности Ферми $|a_\alpha(\mathbf{p})|\sim 1$. Если Ферми-жидкостное взаимодействие не мало, то $|b_\alpha(\mathbf{p})|\sim 1$.

Слагаемые в (18), содержащие интегралы от векторов a_α и b_α, связаны с учетом приходного члена в интеграле столкновений и Ферми-жидкостного взаимодействия соответственно. Первые существенны при $\omega_{1,2}\tau\lesssim 1$, а вторые — при $\omega_{1,2}\tau\gtrsim 1$.

Компоненты $\sigma^{(H)}_{\alpha\beta y}\equiv 0$, а для $\sigma^{(H)}_{\alpha y\gamma}$, $\sigma^{(H)}_{y\beta\gamma}$ получаем

$$\sigma^{(H)}_{\alpha y\gamma}(k_1,\ \omega_1;\ k_2,\ \omega_2)=i\,\frac{e^3}{2\pi^2}\,\frac{\Theta(-kk_1)}{k\,|k_1|}\,\frac{k_2}{\omega_2}\,\frac{\omega_1}{k_1}\times$$

$$\times\int\limits_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_F\\ Q=\pi/2}}\frac{d\varphi}{v^2K(\varphi)}\,v_\alpha v_\gamma\,\frac{\partial v_y}{\partial p_y}\,\frac{1-b_y(\mathbf{p})}{\left(\dfrac{\omega_1+i\tau^{-1}}{k_1}-\dfrac{\omega+i\tau^{-1}}{k}\right)^2}, \tag{19}$$

$$\sigma^{(H)}_{y\beta\gamma}(k_1,\ \omega_1;\ k_2,\ \omega_2)=i\,\frac{e^3}{2\pi^2}\,\frac{\Theta(-kk_1)}{k\,|k_1|}\,\frac{k_2}{\omega_2}\,\frac{\omega}{k}\times$$

$$\times\int\limits_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_F\\ Q=\pi/2}}\frac{d\varphi}{v^2K(\varphi)}\,v_\beta v_\gamma\,\frac{\partial v_y}{\partial p_y}\,\frac{1-b_y(\mathbf{p})}{\left(\dfrac{\omega_1+i\tau^{-1}}{k_1}-\dfrac{\omega+i\tau^{-1}}{k}\right)^2}. \tag{20}$$

Формулы (18)—(20) дают асимптотически точное выражение для тензора нелинейной проводимости $\sigma^{(H)}_{\alpha\beta\gamma}$, справедливое при выполнении неравенств (8). Из них следует, что при $\omega_{1,2}\tau\gtrsim 1$ Ферми-жидкостное взаимодействие вносит существенный вклад в нелинейность. Если же $\omega_{1,2}\tau \ll 1$, то Ферми-жидкостное взаимодействие становится несущественным, а компоненты тензора $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(E)}$ (см. [4], формулы (21), (22)) имеют дополнительный параметр малости $\sim\omega_{1,2}\tau$ по сравнению с компонентами тензора $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(H)}$. (Это утверждение справедливо лишь для существенно анизотропного спектра. При изотропном законе дисперсии, как видно из (18)—(20), тензор $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{(H)}$ имеет четыре отличные от нуля компоненты $\sigma_{xyx}^{(H)}$, $\sigma_{zyz}^{(H)}$, $\sigma_{yxx}^{(H)}$, $\sigma_{yzz}^{(H)}$, которые даже в случае $\omega_{1,2}\tau \ll 1$ могут быть того же порядка, что и две отличные от нуля компоненты $\sigma_{xxy}^{(E)}$, $\sigma_{zzy}^{(E)}$. Ферми-жидкостное взаимодействие дает существенный вклад в эти компоненты и при $\omega_{1,2}\tau \ll 1$).

Видно, что вычисленные нами дополнительные вклады в тензор $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$, вообще говоря, не меняют сделанных в [4] оценок. Ясно также, что специфика рассматриваемой задачи — необходимость учета Ферми-жидкостного взаимодействия, приходного члена в интеграле столкновений, чисто электрической нелинейности и существенная роль продольных электрических полей при аномальном скин-эффекте — связана фактически с сильным подавлением вклада в $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ нелинейности, обусловленной магнитным полем волны.

В заключение рассмотрим кратко следующий порядок теории возмущений, т. е. тензор четвертого ранга $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2; k_3, \omega_3)$, определенный по аналогии с (3). Как нетрудно убедиться, при вычислении тензора $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (и вообще всех соответствующих тензоров четных рангов) подавления нелинейности от магнитного поля не происходит. Это значит, что существенна лишь чисто магнитная нелинейность. В результате становится применимым τ-приближение, а Ферми-жидкостное взаимодействие становится несущественным. После некоторых вычислений $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно представить в виде

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2; k_3, \omega_3) = \frac{e^4}{2\pi^2}\frac{1}{\omega_2\omega_3} \int\limits_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_F \\ Q=\pi/2}} \frac{d\varphi}{v^2 K(\varphi)} \left(\frac{\partial v_y}{\partial p_y}\right)^2 \times$$

$$\times v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta \tau^4 F(k_3, k_2, k_1; \omega_3, \omega_2, \omega_1), \quad k = k_1 + k_2 + k_3 > 0. \tag{21}$$

При $k < 0$ тензор $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно найти из соотношения

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2; k_3, \omega_3) = \sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}(-k_1, \omega_1; -k_2, \omega_2; -k_3, \omega_3).$$

Функция F в (21), кроме выписанных аргументов, зависит лишь от τ. Общее выражение для нее см. в [7] (в формуле (Y. 41) для F допущена неточность, в знаменателях $[k_2(1-i\omega_1\tau)+k_1\omega_2\tau]$ следует ω_2 заменить на $i\omega_2$). При $|\omega_i\tau| \ll 1$ функция F зависит фактически только от k_1, k_2, k_3. Соответствующее выражение приведено в работе [8] (формула (10)). Если $|\omega_1+\omega_2+\omega_3|\tau \gg 1$, $|\omega_i\tau| \gg 1$, то $F \propto \tau^{-4}$ и $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ от τ не зависит.

Из (21) видно, что вклад продольных полей в соответствующий нелинейный ток несуществен. Это важное обстоятельство наряду с уже отмеченными выше сильно упрощает решение задачи о генерации третьей гармоники при падении электромагнитной волны на поверхность проводника. В случае зеркального отражения электронов поверхностью амплитуда излучаемой третьей гармоники $E^{(3)}(0)$ может быть легко выражена через поля линейного приближения, линейный поверхностный импеданс и тензор нелинейной проводимости безграничного проводника $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2; k_3, \omega_3)$, определяемый формулой (21) (соответствующая задача для второй гармоники является существенно более сложной). Мы не будем здесь приводить выражение для $E^{(3)}(0)$, ограничимся лишь порядковой оценкой, верной при любом законе отражения электронов поверхностью

$$E^{(3)}(0) \sim E(0)\,(H(0)/H_{кр})^2, \qquad (22)$$

где E (0) и H (0) — амплитуды электрического и магнитного полей основной частоты ω_f на поверхности проводника, $H_{кр} = |\delta mc\,(\omega_f + i\tau^{-1})^2 (ev_F)^{-1}|$, δ — глубина скин-слоя на частоте ω_f, m — эффективная масса. Очевидно, оценка (22) справедлива при $|H(0)| \lessdot H_{кр}$. Если $|H(0)| \gtrdot H_{кр}$, то нелинейность становится сильной (такие поля существенно изменяют пробег эффективных электронов в скин-слое). Согласно [4], в случае сильной анизотропии закона дисперсии электронов для амплитуды излучаемой второй гармоники $E^{(2)}$ (0) имеем

$$E^{(2)}(0) \sim E(0)\,\frac{(\omega_f + i\tau^{-1})\,\delta}{v_F}\,\frac{H(0)}{H_{кр}}. \qquad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что даже в случае слабой нелинейности амплитуда третьей гармоники может быть много больше амплитуды второй. Весьма благоприятным для экспериментального наблюдения третьей гармоники является то, что при этом не требуется какая-либо анизотропия закона дисперсии (оценка (22) справедлива и при изотропном законе дисперсии).

Список литературы

[1] Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.
[2] Абрикосов А. А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.
[3] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
[4] Копасов А. П. // ФТТ. 1984. Т. 26. № 2. С. 424—429.
[5] Азбель М. Я., Канер Э. А. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. № 4. С. 896—914.
[6] Азбель М. Я. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. № 4. С. 1138—1147.
[7] Копасов А. П. // Автореф. докт. дис. Горький, 1987. 283 с.
[8] Копасов А. П. // ФНТ. 1987. Т. 13. № 3. С. 325—328.

Горьковский исследовательский
физико-технический институт

Поступило в Редакцию
21 февраля 1991 г.