К теории зависимости от магнитного поля теплопроводности диэлектриков в изотропной модели

 Л.А. Максимов, Т.В. Хабарова

Российский научный центр „Курчатовский институт“,
Москва, Россия

E-mail: frau_sych@mail.ru

(Поступила в Редакцию 23 июня 2008 г.)

Анализируется поляризация фононов в магнитном поле в изотропной модели. Показано, что фононы в присутствии спин-фононного взаимодействия обладают круговой поляризацией, благодаря которой возникает компонента потока тепла, перпендикулярная градиенту температуры и магнитному полю.

Работа поддержана грантом РФФИ № 07-02-00287.

PACS: 66.70.+f, 72.15.Gd, 72.20.Pa

1. Введение

Недавно [1,2] был открыт новый эффект — наблюдение в диэлектрическом соединении в магнитном поле потока тепла в направлении, перпендикулярном полю B и градиенту температуры ∇T — фононный Холл-эффект (ФХЭ). Такой поток обусловлен спин-фононным взаимодействием (СФВ) фононов с парамагнитными ионами Tb^{+3}. Теория ФХЭ рассматривалась в работах [3,4] (критику работы [3] см. в [4]).

Однако не только СФВ приводит к зависимости теплопроводности диэлектриков от магнитного поля. Известно, что в молекулярных газах магнитное поле влияет на явление переноса благодаря зависимости сечения столкновений от вращательных моментов молекул $\mathbf{M}$, прецессирующих в магнитном поле (эффект Зенфтлебена–Бинакера [5]).

Следует ожидать, что явление, аналогичное ФХЭ в $Tb_3Ga_5O_{12}$ можно обнаружить в молекулярных кристаллах, в которых имеется компонента, состоящая из молекул, обладающих вращательными степенями свободы (ВСС). Типичными представителями таких веществ являются криокристаллы [6]. К зависимости теплопроводности от магнитного поля может привести рассеяние фононов на молекулах, зависящее от ВСС. Соответствующую теорию легко построить, обобщив теорию Зенфтлебена–Бинакера на случай переноса тепла фононами. В приближении, в котором ВСС рассматриваются квазиклассически, такая теория рассмотрена в [7]. В настоящей работе подойдем к задаче с другой стороны и покажем, что в кристаллах с ВСС существует механизм, близкий к СФВ в ионных кристаллах и приводящий к ФХЭ благодаря перенормировке акустических волн из-за взаимодействия колебаний решетки с вращением молекул. Из соображений симметрии гамильтониан, описывающий такое взаимодействие, можно записать в форме, подобной СФВ,

$$H_1 = -g \sum_n (\mathbf{M}_n, [\mathbf{u}_n \times \mathbf{p}_n]). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{M}_n$ — вращательный момент молекулы, принадлежащей ячейке n, $[\mathbf{u}_n \times \mathbf{p}_n]$ — суммарный орбитальный момент осциллирующих атомов в ячейке. Молекулярные кристаллы, вообще говоря, обладают сложной структурой, содержащей много частиц в элементарной ячейке. Но при низких температурах тепло переносится длинноволновыми упругими волнами, когда все частицы ячейки осциллируют с одинаковой амплитудой $\mathbf{u}_n$ и скоростью $\mathbf{v}_n$. В связи с этим вместо многокомпанентного кристалла адекватным образом можно рассмотреть кристалл с одним атомом в ячейке с массой m, равной суммарной массе частиц в ячейке, и одним вращательным моментом. Величина g в случае СФВ оценивалась в многочисленных работах по спин-решеточной релаксации [4,8]. В случае взаимодействия акустических колебаний с вращательными степенями свободы коэффициент g будем рассматривать как малый феноменологический параметр, имеющий тот же порядок величины, что и для СФВ, если молекула имеет нескомпенсированный электронный момент, как в O_2. Будем использовать систему единиц, в которой $k_B = 1$, $\hbar = 1$. Для краткости взаимодействие (1) в случае кристаллов с вращательными степенями свободы тоже будем называть СФВ. Почти одинаковый вид гамильтониана, описывающего взаимодействие фононов с внутренними степенями свободы в ионных и молекулярных кристаллах (в ионных кристаллах с квазидуплетной структурой нижних уровней компоненты оператора $\mathbf{M}$ заменяются на матрицы Паули), приводит к качественной близости теорий поперечной теплопроводности в обоих случаях. Но с физической точки зрения механизмы взаимодействия далеки друг от друга.

Обычная теплопроводность диэлектриков слабо зависит от детальных свойств акустических колебаний. Как показано в [4], ФХЭ обусловлен возникновением эллиптической поляризации фононов в присутствии магнитного поля и СФВ. Но характер поляризации акустических ветвей существенным образом зависит от свойств симметрии динамической матрицы. В настоящей работе в отличие от общего случая, рассмотренного в [4], в котором почти при всех направлениях волнового вектора $\mathbf{k}$ все три моды колебаний являются невырожденными, будет рассмотрена модель колебаний в изотропной среде, в которой поперечные акустические моды вырождены при всех $\mathbf{k}$. Хотя эта модель реализуется только в случае взаимодействия атомов с большим радиусом взаимодействия, в ней динамическая матрица имеет сравнительно простой вид. Мы найдем в модели изотропной среды поток тепла в направлении $[\mathbf{B} \times \nabla T]$ как для кристаллов с вращательными степенями свободы, так и для ионных кристаллов с квазидуплетной структурой. Первый результат интересен как предсказание наличия ФХЭ в молекулярных кристаллах, а второй дает возможность исправить результаты [3].

2. Поток тепла

Во внешнем магнитном поле среднее значение вращательного момента $\langle \mathbf{M} \rangle = \langle \mathbf{M}_n \rangle$ отлично от нуля, и упругие колебания кристалла определяются перенормированным с учетом (1) гамильтонианом

$$H = \sum_n h_n, \tag{2}$$

где

$$h_n = \frac{1}{2m}\mathbf{p}_n^2 - \frac{1}{2}\sum_{n'} mD_{nn'}^{ab} u_n^a u_{n'}^b - g\langle \mathbf{M} \rangle [\mathbf{u}_n \times \mathbf{p}_n]. \tag{3}$$

Существенно, что эффективная константа взаимодействия $g\langle \mathbf{M} \rangle$ пропорциональна намагниченности частиц и исчезает при выключении магнитного поля.

Используя (3), можно написать квантовое уравнение непрерывности энергии и вывести формулу плотности потока тепла [3,4,9]

$$j_H^\gamma = \frac{m}{2V}\sum_{nn'} r^\gamma D_{nn'}^{ab} u_n^a v_{n'}^b. \tag{4}$$

Подчеркнем, что в этом выражении величина v_n^b есть не импульс иона p_n^b, деленный на массу, а скорость этого иона

$$v_n^a = \partial_t u_n^a = \partial H/\partial p_n^a = p_n^a/m - e_{abc} g \langle M^b \rangle u_n^c. \tag{5}$$

Перейдем в (4) к импульсному представлению, используя формулу

$$\sum_r r^\gamma D_r^{ab} \exp(ikr) = i\nabla_k^\gamma D_k^{ab}. \tag{6}$$

Находим

$$j_H^\gamma = i\,\frac{m}{2V}\sum_{ksk's'} (\nabla_k^\gamma D_k^{ab}) u_{ks}^a v_{-ks'}^b \tag{7}$$

(s — номер моды). Введем разложения векторов смещения и скорости частиц на нормальные колебания

$$u_{ks}^a = \sqrt{\frac{1}{2m\omega_{ks}}}\,(e_{ks}^a a_{ks} + e_{-ks}^{a^*} a_{-ks}^+),$$

$$v_{ks}^a = (-i\omega_{ks})\sqrt{\frac{1}{2m\omega_{ks}}}\,(e_{ks}^a a_{ks} - e_{-ks}^{a^*} a_{-ks}^+). \tag{8}$$

Существенно, что обычный вид имеет именно разложение скорости, а не импульса $\mathbf{p}_i = mv_i - gm(\mathbf{u}_i \times \mathbf{M})$, как полагали авторы [3]. Подставим (8) в (7), усредним по состоянию, диагональному по числам фононов, отбросим аномальные средние $\langle a_{ks} a_{-ks'} \rangle$ и $\langle a_{-ks'}^+ a_{ks}^+ \rangle$ и придем к формуле для потока тепла в направлении $[\mathbf{B} \times \nabla T]$

$$\langle j_H^y \rangle = \frac{1}{4V}\sum_{kss'}\left(\sqrt{\frac{\omega_{ks}}{\omega_{ks'}}} + \sqrt{\frac{\omega_{ks'}}{\omega_{ks}}}\right) \times (\nabla_k^y D_k^{\alpha\beta}) e_{ks}^{\alpha^*} e_{ks'}^{\beta} \langle a_{ks}^+ a_{ks'} \rangle. \tag{9}$$

В изотропном теле ФХЭ характеризуется одним коэффициентом (как константа Холла). Без потери общности мы выбираем намагниченность по оси Z градиент температуры — по X, холловский поток — по Y. На основе этого выражения в [4] была вычислена величина ФХЭ для акустических колебаний общего вида. В настоящей работе рассматриваем модель упругих колебаний изотропного тела, в которой динамическая матрица нулевого приближения D_k^{ab} имеет вид

$$D_k^{ab} = c_0^2 \delta^{ab} k^2 + wk_a k_b \tag{10}$$

с вырожденными поперечными ветвями $\omega_{+,-}^2 = \omega_0^2 = c_0^2 k^2$ и продольной ветвью $\omega^2 = \omega_\parallel^2 + \lambda$, $\lambda = wk^2$. Здесь отброшен третий независимый член вида $\delta^{ab} k_a^2$, который в кубическом кристалле снимает вырождение.

Для модели изотропного тела, учитывая ортогональность векторов поляризации $e_{ks}^{a^*} e_{ks'}^a = \delta_{ss'}$, имеем

$$\langle j_H^y \rangle = \frac{1}{4V}\sum_{kss'}\left(\sqrt{\frac{\omega_{ks}}{\omega_{ks'}}} + \sqrt{\frac{\omega_{ks'}}{\omega_{ks}}}\right) \times \left[\delta_{ss'} 2c_0^2 k^y + w\left((k_a e_{ks}^{a^*}) e_{ks'}^y + e_{ks}^{y^*}(k_b e_{ks'}^b)\right)\right] \langle a_{ks}^+ a_{ks'} \rangle. \tag{11}$$

Обратим внимание на то, что формулы (4), (9), (11) явно не содержат константы g. Величина потока тепла изменяется только благодаря перенормировке спектра и поляризации фононов. Можно убедиться, что члены (11), диагональные по модам, не приводят к потоку в направлении $[\mathbf{B} \times \nabla T]$. Явление ФХЭ описывается недиагональными по модам членами (11)

$$\langle j_H^y \rangle = \frac{w}{2V}\sum_{kss'}\left(\sqrt{\frac{\omega_{ks}}{\omega_{ks'}}} + \sqrt{\frac{\omega_{ks'}}{\omega_{ks}}}\right) \times \mathrm{Re}\left[e_{ks}^{y^*}\left(\mathbf{k}\mathbf{e}_{ks'}\right)\langle a_{ks}^+ a_{ks'} \rangle\right]. \tag{12}$$

В частности, коррелированное движение поперечных мод дает

$$\langle j_\perp^y \rangle = \frac{w}{V}\sum_k \mathrm{Re}\Big\{ e_{k-}^{y^*}(\mathbf{k}\mathbf{e}_{k+})\langle a_{k-}^+ a_{k+} \rangle + e_{k+}^{y^*}(\mathbf{k}\mathbf{e}_{k-})\langle a_{k+}^+ a_{k-} \rangle \Big\}. \tag{13}$$

3. Круговая поляризация

Выражение (13) существенным образом зависит от векторов поляризации фононов. В первую очередь необходимо установить их вид с учетом СФВ. Гамильтониан (3) приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega_{ks}^2 e_{ks}^a = \tilde{D}_k^{ab} e_{ks}^b, \tag{14}$$

где

$$\tilde{D}_k^{ab} = D_k^{ab} + iD_{1k}^{ab},\ D_{1k}^{ab} = e_{abc}G^c,\ G^e = 2\omega g\langle M^c\rangle, \tag{15}$$

$$\tilde{D}_k^{ab}(\mathbf{G}) = \left(\tilde{D}_k^{ba}(-\mathbf{G})\right)^*, \quad (\mathbf{e}_{ks}^*\mathbf{e}_{ks'}) = \delta_{ss'}. \tag{16}$$

Вклад СФВ в динамическую матрицу есть мнимый антисимметричный тензор. В модели (10) дисперсионное уравнение (14) принимает вид

$$We^a = \lambda\hat{k}^a(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{e}) + i[\mathbf{e}\times\mathbf{G}]^a. \tag{17}$$

Здесь $W = \omega^2 - \omega_0^2$, $\lambda = wk^2$, $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, $\mathbf{G} = (0, 0, G)$, $(\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}}) = G\cos\theta$ и $Q = G\sin\theta$. Введем нормированные орты

1) $\hat{\mathbf{k}}$,

2) $\hat{\mathbf{m}} = \left(\mathbf{G} - \left(\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}}\right)\hat{\mathbf{k}}\right)/Q$
$= (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$,

3) $\hat{\mathbf{n}} = [\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{m}}] = Q^{-1}[\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{G}] = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$. (18)

Из (17) находим компоненты вектора $\mathbf{e}$

$$\mathbf{e} = \xi\left[\frac{Q}{\lambda - W}\,\hat{\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}}}{W}\,\hat{\mathbf{m}} - i\hat{\mathbf{n}}\right] \tag{19}$$

и уравнение на собственные значения

$$\frac{Q^2W}{\lambda - W} + W^2 - (\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}})^2 = 0. \tag{20}$$

Дисперсионное уравнение (14) определяет векторы поляризации с точностью до фазы. Примем фазу параметра равной нулю. Модуль параметра задается нормировкой

$$\xi^{-2} = \left(\frac{Q}{\lambda - W}\right)^2 + \left(\frac{(\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}})}{W}\right)^2 + 1. \tag{21}$$

Вектор поляризации (19) при инверсии $(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}} \to -\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{m}}, -\hat{\mathbf{n}})$ меняет знак как полярный вектор. Комплексность вектора (19) означает, что он эллиптически поляризован.

Формулы (19)–(21) справедливы при любом G. Далее предполагаем взаимодействие фононов с внутренними степенями свободы ионов (молекул) слабым $G \ll \lambda$. В этом случае из (20) получаем одну продольную моду $W_\parallel = \lambda$, $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{k}}$.

Для поперечных мод величина W в нулевом приближении равна нулю, а при учете G равна

$$W_\eta = \frac{1}{2}\left(-(Q^2/\lambda) + \eta\sqrt{(Q^2/\lambda)^2 + 4(\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}})}\right),\ \eta = \pm 1 \tag{22}$$

и характеризует их расщепление

$$\Delta = \omega_+ - \omega_- = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{(Q^2/2\lambda)^2 + (\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}})^2}. \tag{23}$$

Расщепление минимально на экваторе $\left(|\cos\theta| < G/\lambda, \delta = Q^2/(2\lambda\omega_0)\right)$. Для остальных направлений $\hat{\mathbf{k}}$ имеем

$$W_\eta = \eta|\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}}|, \quad \Delta = G|\cos\theta|/\omega_0. \tag{24}$$

Действительная и мнимая части каждого из $\mathbf{e}_\eta$ в нулевом приближении взаимно перпендикулярны и равны друг другу

$$\mathbf{e}_\eta \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\eta(\operatorname{sign}\cos\theta)\hat{\mathbf{m}} - i\hat{\mathbf{n}}]. \tag{25}$$

Это означает, что поперечные фононы имеют круговую поляризацию [3].

Направление вектора поляризации (25) меняется скачком при пересечении экватора. Однако если изменить нумерацию поперечных мод и вместо (24) писать $W_\eta = \eta\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}}$, то проекция (19) на ось $\hat{\mathbf{m}}$ будет постоянной. Так всегда происходит при пересечении уровней. От выбора нумерации величина (13), очевидно, не зависит.

В линейном по СФВ приближении обнаруживаем отклонение от поперечности

$$\left(\mathbf{e}_\eta\hat{\mathbf{k}}\right) = \frac{\xi_\eta Q}{\lambda}\left(1 + \frac{W_\eta}{\lambda}\right). \tag{26}$$

Кроме того, далее потребуются выражения

$$\xi_\eta \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{Q^2}{4\lambda W_\eta}\right), \tag{27}$$

$$e_\eta^y = \xi_\eta\left[\frac{Q}{\lambda - W_\eta}(\sin\theta\sin\varphi) + \frac{(\mathbf{G}\hat{\mathbf{k}})}{W_\eta}(-\cos\theta\sin\varphi) + i\cos\varphi\right]. \tag{28}$$

4. Недиагональная матрица плотности

В формулу (13) входит проекция вектора поляризации на направление волнового вектора $(\mathbf{e}_\eta\hat{\mathbf{k}})$, которая линейна по СФВ. Следовательно, недиагональную по модам матрицу плотности $\langle a_{ks}^+ a_{ks'}\rangle$ достаточно вычислить в нулевом приближении по СФВ.

Как известно, неравновесная часть матрицы плотности (диагональная по модам) в тау-приближении равна

$$f_p = \langle a_p^+ a_p \rangle - N_p = -\frac{1}{\Omega_{pp}}(\mathbf{c}_p \nabla) N_p$$

$$= -\frac{1}{\Omega_{pp} T^2} N_p (1 + N_p)(\omega_p \mathbf{c}_p) \nabla T. \qquad (29)$$

Здесь и в дальнейшем для краткости пишем $p = ks$, величина $1/\Omega_{pp}$ — время релаксации p-фонона. Кроме того, в очевидных случаях будем опускать индекс k.

Соответствующий поток энергии параллелен ∇T и приводит к коэффициенту теплопроводности

$$\varkappa^{xx} \simeq T^3 (c\Omega)^{-1}, \qquad (30)$$

где c, Ω — средние значения c_p, Ω_{pp}.

Недиагональную часть матрицы плотности можно выразить через f_p, построив обобщенное уравнение Больцмана. Рассеяние фононов имеет много каналов: ангармонизм, резонансное рассеяние с возбуждением мультиплетной структуры молекул, рассеяние с участием вращательных степеней свободы, рассеяние на примесях. Во всех случаях ответ имеет одинаковую структуру. В работе [4] показано, что

$$\langle a_p^+ a_q \rangle = \frac{i J_{pq}}{(\omega_p - \omega_q)}, \qquad (31)$$

где J_{pq} — эрмитова матрица, которая от обычного интеграла столкновений отличается главным образом тем, что вместо квадрата модуля амплитуды рассеяния (золотое правило Ферми) стоит произведение амплитуд рассеяния фононов. В тау-приближении это выражение имеет вид

$$\langle a_p^+ a_q \rangle = -i\, \frac{\Omega_{qp}(\omega_p) f_p + \Omega_{qp}(\omega_q) f_q}{2(\omega_p - \omega_q)}, \qquad (32)$$

где $\Omega_{qp}^*(\omega_p) = \Omega_{pq}(\omega_p)$, $\langle a_p^+ a_q \rangle^* = \langle a_q^+ a_p \rangle$.

Вид эффективных частот релаксации зависит от механизма рассеяния. В [4] приведены соответствующие формулы для резонансного рассеяния и ангармонизма. В случае потенциального рассеяния на примесях

$$\Omega_{qp}(\omega_p) = 2\pi \frac{N_{im}}{N^2} \sum_g A_{qg} A_{gp} \delta(\omega_p - \omega_g). \qquad (33)$$

Существенно, что амплитуда перехода $A_{pq} = e_p^{a^*} A_{pq}^{ab} e_q^b$ пропорциональна векторам поляризации. Это гарантирует независимость потока (13) от общих фаз мод фононов (фазы параметра ξ в (19)). Зависимость A_{qg} от поляризаций автоматически переносится на частоты релаксации $\Omega_{qp} = e_q^{a^*} \Omega_{qp}^{ab} e_p^b$, где тензор $\Omega_{qp}^{ab} = (\Omega_{pq}^{ba})^*$ от внешних векторов поляризации не зависит. В модели изотропного тела для поперечных мод в (32) в числителе расщеплением мод можно пренебречь

$$\langle a_{k+}^+ a_{k-} \rangle = -i \Omega_{-+}(\omega_0) \frac{f_\perp}{\Delta}. \qquad (34)$$

Когда одна из мод продольная, из (32) имеем

$$\langle a_2^+ a_\eta \rangle = -\frac{i}{2\varepsilon} \left[\Omega_{3\eta}(\omega_3) f_3 + \Omega_{\eta 3}(\omega_0) f_\perp\right], \qquad (35)$$

где $\varepsilon = \omega_3 - \omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2} - \omega_0$.

5. Вычисление вклада поперечных мод в $\varkappa^{yx}$

Применим полученные выше формулы для вычисления поперечного коэффициента теплопроводности $\varkappa^{yx}$. Подставим в (13) выражение (34)

$$\langle j_\perp^y \rangle = -\frac{w}{V} \sum_k \mathrm{Re}\Big\{ -e_{k-}^{y^*} (\mathbf{k}\mathbf{e}_{k+}) i \Omega_{-+}^*(\omega_0) \frac{f_\perp}{\Delta}$$

$$+ e_{k+}^{y^*} (\mathbf{k}\mathbf{e}_{k-}) i \Omega_{-+}(\omega_0) \frac{f_\perp}{\Delta} \Big\}. \qquad (36)$$

Функция (29) $f_\perp$ пропорциональна $c^x \sim \cos\varphi$, и отличный от нуля результат дает только мнимая часть (28): $e_{k\eta}^{y^*} = -i\xi_\eta \cos\varphi$. Подставим (28) и (26) в (36)

$$\langle j_\perp^y \rangle = -\frac{w}{V} \sum_k \frac{f_\perp}{\Delta} \frac{kQ}{\lambda} \xi_- \xi_+ \cos\varphi$$

$$\times \mathrm{Re}\left\{ -\left(1 + \frac{W_+}{\lambda}\right) \Omega_{-+}^* + \left(1 + \frac{W_-}{\lambda}\right) \Omega_{-+} \right\}. \qquad (37)$$

Видно, что вклад в ФХЭ вносят только члены второго порядка в (26). С учетом вида параметров λ, Δ, Q, ξ_η, W_η, G, введенных выше, получаем

$$\langle j_\perp^y \rangle = \frac{2g \langle \mathbf{M} \rangle w}{V} \sum_k f_\perp \frac{\omega_0^2}{w^2 k^3} \sin\theta \cos\varphi \mathrm{Re}\Omega_{-+}. \qquad (38)$$

Теперь остается проинтегрировать это выражение, используя (29),

$$\varkappa^{yx} = \frac{2g \langle \mathbf{M} \rangle w}{V} \sum_k \frac{\omega_0^3}{w^2 k^3} (\sin\theta \cos\varphi)^2 \frac{\mathrm{Re}\Omega_{-+}}{\Omega_{pp} T^2} N_p (1 + N_p). \qquad (39)$$

В результате находим, принимая $w \simeq c^2$ и $\left\langle \frac{\mathrm{Re}\Omega_{-+}}{\Omega_{pp}} \right\rangle \simeq 1$, с точностью до численного коэффициента

$$\varkappa^{yx} = \frac{4g \langle \mathbf{M} \rangle}{V} \sum_k \frac{c^2}{T^2} N_p (1 + N_p) \simeq \frac{g \langle \mathbf{M} \rangle T}{c}. \qquad (40)$$

Разделим эту величину на коэффициент продольной теплопроводности $\varkappa^{xx} \simeq T^3 (c\Omega)^{-1}$ и найдем угол Холла

$$\frac{\varkappa^{yx}}{\varkappa^{xx}} \simeq \langle \mathbf{M} \rangle \frac{g\Omega}{T^2}. \qquad (41)$$

6. Оценка роли продольной моды

Второй канал холловской теплопроводности обусловлен возникновением в присутствии градиента температуры коррелированного движения продольных и поперечных фононов, которое характеризуется компонентой недиагональной матрицы плотности (35),

$$\langle a_1^+ a_3 \rangle = -\frac{i}{2\varepsilon}\left[\Omega_{3\eta}(\omega_3) f_1 + \Omega_{\eta 3}(\omega_3) f_3\right]. \qquad (42)$$

Здесь $1 = (\mathbf{k}, \perp)$, $3 = (\mathbf{k}, \|)$. Эта матрица плотности (и ее эрмитово сопряжение) формирует холловский поток тепла (см. (12)).

$$\langle j_H^y \rangle = \frac{w}{2V}\sum_k \left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_3}} + \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_1}}\right) \times \mathrm{Re}\left[\left\{e_1^{y^*}(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{e}_3) + e_3^{y^*}(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{e}_1)\right\}\langle a_3^+ a_1\rangle\right]. \qquad (43)$$

Матрица (35) пропорциональна (29) и $\cos\varphi$. При этом $e_{k\eta}^{y^*} = -i\xi_\eta \cos\varphi$, а $e_3^{y^*} = \sin\theta\sin\varphi$. Значит, вклад в интеграл вносит только первый член в фигурных скобках. В этом случае проекция $(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{e}_3) \simeq 1$, и подынтегральное выражение в (42) не содержит малого параметра СФВ

$$\langle j_H^y \rangle = -\frac{w}{2V}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k \left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_3}} + \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_1}}\right) \times \cos\varphi\,\frac{k}{2\varepsilon}\left(f_1 \mathrm{Re}\Omega_{31} + f_3 \mathrm{Re}\Omega_{13}\right). \qquad (44)$$

Подставляя сюда (29) и интегрируя, получаем оценку вклада продольной моды в холловскую теплопроводность

$$\varkappa^{yx} \simeq -\frac{T^2 \mathrm{Re}\Omega_{31}}{(c_\| - c_0)\Omega_{pp}} \simeq \frac{T^2}{c_0}. \qquad (45)$$

Угол Холла в данном случае имеет порядок величины

$$\frac{\varkappa^{yx}}{\varkappa^{xx}} \simeq \langle \mathbf{M} \rangle \frac{\Omega}{T}. \qquad (46)$$

7. Заключение

Сравним оценки холловских коэффициентов теплопроводности, обусловленных корреляцией продольной и поперечной мод $\varkappa_\|^{yx}$ (45), поперечными модами $\varkappa_\perp^{yx}$, и оценку $\varkappa_{KM}^{yx}$, найденную в [4] для ионного кристалла с невырожденными модами,

$$\varkappa_\|^{yx} \sim \frac{T^2}{c_0}, \quad \varkappa_\perp^{yx} \sim \frac{g\langle M\rangle T}{c_0}, \quad \varkappa_{KM}^{yx} \sim \frac{g\langle\sigma\rangle T}{\bar{c}}. \qquad (47)$$

Видно, что оценки для поперечных мод в изотропной модели и для кубического кристалла совпадают с точностью до замены средней поляризации, обусловленной вращательным моментом на поляризацию псевдоспина. Существенно, что в обоих случаях нет зависимости от частоты столкновений, как и должно быть для компоненты потока тепла в направлении $[\mathbf{B} \times \nabla T]$. Вклад продольной моды (45) имеет качественно иной вид. Он не зависит не только от частоты столкновений, но и от константы взаимодействия, как в обычном эффекте Холла. При сравнительно высоких температурах $(T \gg g)$ канал $\varkappa_\|^{yx}$ играет ведущую роль. Если бы существовали кристаллы, в которых хотя бы приблизительно имелись акустические колебания с эллиптичностью, близкой к круговой, наблюдение ФХЭ стало бы сравнительно простой задачей.

Первая теоретическая работа [3], посвященная ФХЭ, содержала ошибку при использовании связи (5) между скоростями движения частиц и их импульсом при наличии СФВ. Тем не менее интересно сравнить оценку $\varkappa^{yx}$ в [3] с нашими формулами (45), (40), поскольку в [3] вычисления проводились в изотропной модели, как в настоящей работе. Если не обращать внимания на численные коэффициенты, которые являются очевидным превышением точности, авторы получили результат

$$\varkappa_{\mathrm{sheng}}^{yx} \sim \frac{gT}{c_0}, \qquad (48)$$

совпадающий с (40) и основным результатом работы [4]. Это совпадение обусловлено не эквивалентностью наших теорий, а лишь тривиальным следствием одинаковой размерности результатов и того, что все они получены в линейном приближении по g. В связи с этим следует подчеркнуть, что основным результатом настоящей работы (и [4]) является не оценка $\varkappa^{yx}$, а установление того факта, что причиной ФХЭ служит совместное действие двух одинаково важных факторов: 1) эллиптической поляризации и фононов, обусловленной СФВ; 2) наведенного градиентом температуры коррелированного движения двух фононных мод с образованием недиагональной матрицы плотности.

Список литературы

[1] C. Strohm, G.L.J.A. Rikken, P. Wyder. Phys. Rev. Lett. **95**, 155 901 (2005).
[2] А.В. Инюшкин, А.Н. Талденков. Письма в ЖЭТФ **86**, *6*, 436 (2007).
[3] L. Sheng, D.N. Sheng, C.S. Ting. Phys. Rev. Lett. **96**, 155 901 (2006).
[4] Yu. Kagan, L.A. Maksimov. Phys. Rev. Lett. **100**, 145 902 (2008); Yu. Kagan, L.A. Maksimov. arXiv: 0707.2565 (2007).
[5] L.J.F. Hermans, P.H. Fortuin, H.F.P. Knaap, J.J.M. Beenakker. Phys. Lett. A **25**, 81 (1967); Л.Л. Горелик, В.Г. Николаевский, В.В. Синицын. Письма в ЖЭТФ **4**, *11*, 456 (1966); Ю. Каган, Л.А. Максимов. ЖЭТФ **51**, 1893 (1966).
[6] Криокристаллы / Под ред. Б.И. Веркина, А.Ф. Прихотько. Наук. думка, Киев (1983). 526 с.
[7] L.A. Maksimov, T.V. Khabarova. arXiv: 0308.1234 (2008).
[8] Spin-Lattice relaxation in ionic solids / Eds A.A. Manenkov, R. Orbach. Harper & Row, N.Y. (1966). 453 p.; A.A. Abragam, B. Bleaney. Electron paramagnetic resonance of transition ions. Clarendon Press, Oxford (1970). 583 p.; H. Capellmann, S. Lipinski. Z. Phys. B: Cond. Mat. **83**, 199 (1991); A.S. Ioselevich, H. Capellmann. Phys. Rev. B **51**, 11 446 (1995).
[9] R.J. Hardy. Phys. Rev. **132**, 168 (1963).