

Структура электрического поля в задаче о скин-эффекте

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет,
Москва, Россия

E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 24 сентября 2008 г.)

Выяснена структура электрического поля в задаче о скин-эффекте в металле. Показано, что электрическое поле представляет собой сумму интегрального слагаемого и двух (или одного) экспоненциального убывающих частных решений исходной системы, причем в зависимости от величины параметра аномальности одно частное решение исчезает. В явном виде получено выражение для профиля функции распределения в полупространстве, а также на границе металла. Проведен анализ величины модуля электрического поля, а также ее действительной и мнимой частей в случае аномального скин-эффекта.

PACS: 52.35.-g, 52.20.-j, 52.25.-b

1. Введение

Скин-эффект обусловлен откликом электронного газа (в металлической или газовой плазме) на внешнее тангенциальное к поверхности переменное электромагнитное поле [1–4]. Эта классическая задача изучалась и изучается в настоящее время многими авторами [5–13]. Основное внимание при этом уделялось вычислению поверхностного импеданса. Функция распределения электронов и электрическое поле в металле фактически ранее не изучались. Дело в том, что и метод Винера–Хопфа и метод источника, используемые в задаче о скин-эффекте, приводят к выражению электрического поля в виде интеграла, который трудно исследовать численными методами.

В настоящей работе предлагается несколько иной подход, нежели классический (см., например, [1]). Наш подход изложен в [14]. Этот метод называется методом разложения по собственным решениям, или методом Кейза.

Метод Кейза состоит в экспоненциальном выделении пространственной переменной y функции распределения и поля с соответствующими весовыми функциями. Получается характеристическая система, исключая из которой одну из весовых функций, приходят к одному уравнению, содержащему так называемую дисперсионную функцию. Ее нули образуют дискретный спектр, которому отвечают частные (дискретные) решения. Решение характеристического уравнения в пространстве обобщенных функций дает собственные решения непрерывного спектра.

Предлагаемый подход основан на разложении решения задачи по собственным решениям дискретного и непрерывного спектра. Решение, отвечающее дискретному спектру, есть сумма убывающих частных решений, которые определяются нулями дисперсионной функции, а решение, отвечающее непрерывному спектру, представляет собой интеграл по этому спектру. Важность исследования числа нулей дисперсионной функции для

описания поведения электрического поля в задаче и скин-эффекте подчеркивалась в работах [8,9].

2. Постановка задачи

Рассмотрим полупространство, занятое металлом. Введем декартову систему координат с центром на поверхности и осью x , перпендикулярной к поверхности и направленной в глубь металла. Ось y проведем вдоль направления электрического поля $E_y(x, t) = E_y(x) \times \exp(-i\omega t)$, $E_y(0) = E_0$, а ось z — вдоль направления магнитного поля.

Возьмем кинетическое уравнение Больцмана с учетом самосогласованного поля и с представлением интеграла столкновений через время релаксации [4]. Для достаточно слабых внешних полей это уравнение можно линеаризовать по внешнему полю и по малым отклонениям функции распределения $f_1(x, \mathbf{v})e^{-i\omega t}$ от равновесной f_0

$$-i\omega f_1 + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + e_0 v_y E_y \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (1)$$

В качестве уравнения для поля возьмем следствие уравнений Максвелла для поля и тока в металле

$$\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} = -\frac{4\pi i \omega e_0}{c^2} \int v_y f_1(x, v_x) \frac{2d^3 p}{(2\pi \hbar)^3}. \quad (2)$$

В (1), (2) e_0 — заряд электрона, c — скорость света, \hbar — постоянная Планка, $\nu = 1/\tau$ — эффективная частота столкновений электронов, $p = mv$ — импульс электрона, $\varepsilon = mv^2/2$ — кинетическая энергия электрона, m — масса электрона, $f_0(\varepsilon)$ — равновесная функция распределения электронов, аппроксимируется единичной ступенькой: $f_0(\varepsilon) = 1$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F$, $f_0(\varepsilon) = 0$, $\varepsilon_F < \varepsilon$, $\varepsilon_F = mv_F^2/2$ — энергия Ферми, v_F — скорость электрона на поверхности Ферми, которая считается сферической.

Введем безразмерные параметры: координату $x_1 = x/l$, где $l = v_F \tau$ — средняя длина свободного пробега электронов, и электрическое поле $e(x_1) = E_y(x_1)/E_0$. Положим далее $f_1 = v_y \delta(v - v_F) \tau e_0 E_0 h(x_1, \mu) / (m v_F)$, где δ — дельта-функция, а $\mu = v_x / v_F$. Согласно (1) и (2), получаем следующие уравнения:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1, \mu) = e(x_1), \quad (3)$$

$$\frac{d^2 e(x_1)}{dx_1^2} = -i\alpha \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) h(x_1, \mu) d\mu. \quad (4)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{3}{2} \left(\frac{l}{\delta} \right)^2, \quad z_0 = 1 - i\Omega,$$

$$\Omega = \omega \tau = \frac{\omega}{v}, \quad \delta^2 = \frac{c^2}{2\pi\omega\sigma},$$

где δ — классическая глубина проникновения электрического поля в глубь проводника при скин-эффекте [1], σ — статическая проводимость.

Сформулируем граничные условия на поверхности металла для функции распределения электронов в случае зеркального отражения электронов от границы [1]

$$h(0, \mu) = h(0, -\mu), \quad 0 < \mu < 1. \quad (5)$$

Функцию распределения ищем затухающей вдали от границы

$$h(+\infty, \mu) = 0, \quad -1 < \mu < 0. \quad (6)$$

Электрическое поле в глубине металла вдали от поверхности затухает. Учитывая это обстоятельство, граничные условия для электрического поля запишем в виде

$$e(0) = 1, \quad (7)$$

$$e(+\infty) = 0. \quad (8)$$

Далее координату x_1 будем обозначать через x . Разделение переменных в уравнениях (3) и (4) через несколько шагов приводит к экспоненциально убывающим решениям

$$h_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu),$$

$$e_\eta(x) = \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta}\right) E(\eta), \quad (9)$$

где η — параметр разделения, называемый также спектральным параметром, заполняет сплошным образом интервал $(0, 1)$ который в связи с этим и называется непрерывным спектром задачи.

Подстановка выражений (9) в исходную систему (3), (4) приводит к системе уравнений, называемой характеристической,

$$z_0(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta E(\eta),$$

$$\frac{z_0^2}{\eta^2} E(\eta) = -i\alpha \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) \Phi(\eta, \mu) d\mu.$$

Функции $\Phi(\eta, \mu)$ и $E(\eta)$, называемые собственными функциями характеристической системы, отвечающими собственному (или характеристическому) значению η , определяются соотношениями

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{a}{2} \eta^3 P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1 - \eta^2} \delta(\eta - \mu),$$

$$E(\eta) = \frac{az_0}{2} \eta^2, \quad (10)$$

где $\lambda(z)$ — функция, называемая дисперсионной (см., например, [14]),

$$\lambda(z) = 1 + \frac{az^3}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - \mu^2}{\mu - z} d\mu, \quad a = -\frac{2i\alpha}{z_0^3}. \quad (11)$$

3. Частные решения исходной системы уравнений

Найдем нули дисперсионной функции, множество которых называется дискретным спектром характеристического уравнения.

Для нахождения нулей воспользуемся принципом аргумента из теории функций комплексного переменного.

Согласно принципу аргумента, разность между числом нулей N и полюсов P дисперсионной функции равна деленному на 2π приращению ее аргумента вдоль контура γ , охватывающего разрез $[-1, 1]$ по часовой стрелке и отстоящего от него на расстоянии ε

$$N - P = \frac{1}{2\pi} [\arg \lambda(z)]_\gamma. \quad (12)$$

Из разложения

$$\lambda(z) = 1 - \frac{2a}{15} - \frac{2a}{3} z^2 - \frac{2a}{35z^2} - \dots, \quad |z| > 1,$$

видно, что в точке $z = \infty$ дисперсионная функция имеет полюс второго порядка, т.е. в формуле (12) $P = 2$.

Переходя к пределу в равенстве (12) при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$N = 2 + \frac{1}{2\pi} [\arg G(\tau)]_{[-1, 1]}, \quad G(\tau) = \frac{\lambda^+(\tau)}{\lambda^-(\tau)}. \quad (13)$$

Из представления (11) видно, что в точках разреза $[-1, +1]$ граничные значения дисперсионной функции

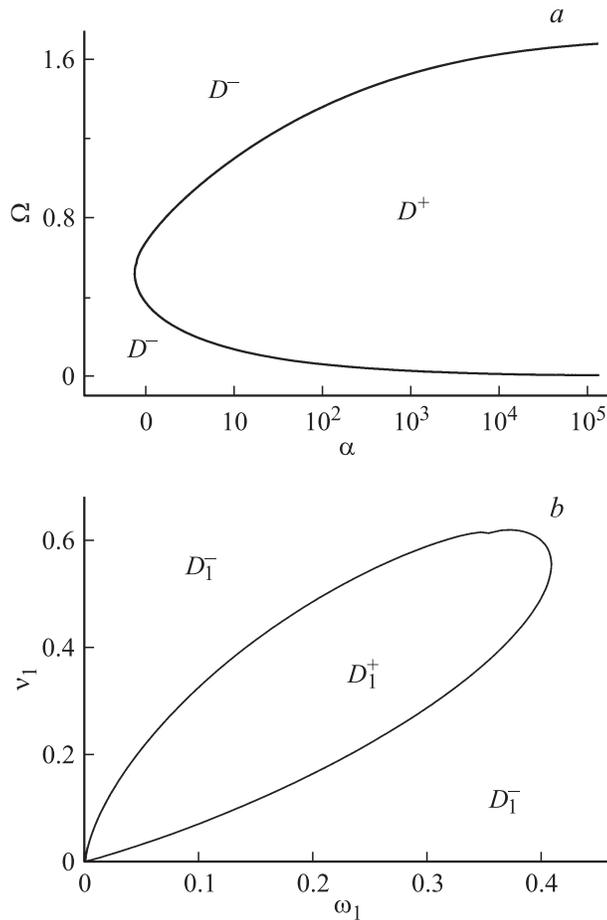


Рис. 1. Области D^+ на (α, Ω) -плоскости (а) и области D_1^\pm на (ω_1, ν_1) -плоскости (б).

сверху $\lambda^+(\mu)$ и снизу $\lambda^-(\mu)$ от разреза определяются, согласно формулам Сохоцкого, равенствами

$$\lambda^\pm(\mu) = \lambda(\mu) \pm \frac{i\pi a}{2} \mu^3 (1 - \mu^2).$$

Представим функцию $G(\mu)$ в виде $G(\mu) = \omega^+(\mu)/\omega^-(\mu)$, где

$$\omega^\pm(\mu) = \frac{\lambda^\pm(\mu)}{a} = \frac{1}{a} - p(\mu) \mp iq(\mu), \quad \frac{1}{a} = -\frac{(\Omega + i)^3}{2\alpha},$$

$$p(\mu) = \mu^3 \left[\mu - \frac{1}{2} (1 - \mu^2) \ln \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right],$$

$$q(\mu) = \frac{\pi}{2} \mu^3 (1 - \mu^2).$$

С использованием равенства (13) можно показать, что на плоскости (α, Ω) существует такая область D^+ (рис. 1, а), что если точка $(\alpha, \Omega) \in D^+$, то дисперсионная функция имеет четыре нуля $\pm\eta_0$ и $\pm\eta_1$, а если $(\alpha, \Omega) \in D^-$, D^- — внешность области D^+ , то дисперсионная функция имеет два нуля $\pm\eta_0$. Через η_0 и η_1 обозначены нули с положительной действительной частью, т.е. $\text{Re } \eta_0 > 0$ и $\text{Re } \eta_1 > 0$. Граница области D^+ находится

из уравнений $\omega^\pm(\mu) = 0$ и в параметрической форме определяется уравнениями $1 - 3\Omega^2 \pm 2\alpha q(\mu) = 0$, $3\Omega - \Omega^3 - 2\alpha p(\mu) = 0$, $-1 < \mu < 1$.

Отметим, что параметры α и Ω пропорциональны частоте поля ω , т.е. они не являются независимыми. В связи с этим представляется совершенно естественным ввести безразмерные независимые частоты

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\omega c}{\sqrt{3}\omega_p v_F}, \quad \nu_1 = \frac{\sqrt{2}\nu c}{\sqrt{3}\omega_p v_F},$$

на плоскости которых построить соответствующие области D_1^+ и D_1^- (рис. 1, б); здесь ω_p — плазменная частота, $\omega_p^2 = 4\pi n e_0^2 / m$, n — концентрация электронов.

Отметим, что параметр аномальности α и частоту Ω можно выразить через эти частоты: $\alpha = \omega_1 / (2\nu_1^3)$, $\Omega = \omega_1 / \nu_2$.

Подчеркнем, что в ряде вопросов удобнее использовать параметры α и Ω , а в других — ω_1 и ν_1 . Так, для общего анализа скин-эффекта целесообразно использовать параметр аномальности α и отношение частот $\Omega = \omega / \nu$, а для конкретных численных расчетов — безразмерные частоты ω_1 и ν_1 .

Нулям η_0 и η_1 отвечают следующие собственные функции характеристического уравнения, соответствующие дискретному спектру:

$$\Phi(\eta_k, \mu) = \frac{a\eta_k^3}{2(\eta_k - \mu)}, \quad E(\eta_k) = \frac{1}{2} a z_0 \eta_k^2, \quad k = 0, 1.$$

Нули дисперсионной функции можно вычислить в явном виде, используя формулы для ее факторизации. Так, в случае двух нулей $\pm\eta_0$ дисперсионная функция (см. [11]) может быть представлена в виде

$$\lambda(z) = \frac{2a}{3} (\eta_0^2 - z^2) X(z) X(-z),$$

где

$$X(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z} \right\} V(z),$$

а в случае четырех нулей $\pm\eta_0, \pm\eta_1$

$$\lambda(z) = \frac{2a}{3} (\eta_0^2 - z^2)(\eta_1^2 - z^2) X_1(z) X_1(-z),$$

где функция $X_1(z)$ выражается через $X(z)$: $X_1(z) = X(z)/(z - 1)$.

Вычисляя левую и правую части первой из формул для факторизации дисперсионной функции (например, в точке $z = i$), после некоторых преобразований для ее нулей получаем формулу

$$\pm\eta_0 = \sqrt{-1 + 3(a^{-1} + 1) \exp[-Y(-i)]},$$

где

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

В теории скин-эффекта выделяют нормальный и аномальный скин-эффекты [4]. В случае нормального скин-эффекта длина свободного пробега электронов много меньше характерной глубины скин-эффекта, т.е. параметр аномальности $\alpha \ll 1$. Аномальный скин-эффект отвечает случаю, когда длина свободного пробега электронов много больше характерной глубины скин-эффекта. В этом случае $\alpha \gg 1$.

4. Разложение по собственным решениям

Составим общее решение исходной системы уравнений в виде разложения по собственным функциям дискретного и непрерывного спектров. Так как дискретный спектр в случае нулевого индекса и в случае единичного индекса различен, а непрерывный спектр от индекса не зависит, то в обоих случаях разложения решения различаются лишь внеинтегральными слагаемыми, отвечающими дискретному спектру.

В [11] показано, что функция распределения и электрическое поле, являющиеся решением задачи (3)–(8), имеют соответственно следующие разложения

$$h(x, \mu) = \frac{a}{2} \sum_{k=0}^2 \frac{A_k \eta_k^3}{\eta_k - \mu} \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta_k}\right) + \int_0^1 \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta}\right) A(\eta) \Phi(\eta, \mu) d\eta, \quad (14)$$

$$e(x) = \frac{az_0}{2} \sum_{k=0}^2 A_k \eta_k^2 \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta_k}\right) + \frac{az_0}{2} \int_0^1 \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta}\right) \eta^2 A(\eta) d\eta. \quad (15)$$

Здесь $\text{Re } \eta_k > 0$, A_k ($k = 0, 1$) — неизвестные постоянные коэффициенты разложения (14) и (15) (так называемые коэффициенты дискретного спектра), $A(\eta)$ — неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра.

Отметим, что в случае двух нулей дисперсионной функции следует положить $k = 0$ в (14) и (15). Таким образом, структура электрического поля зависит от того, в какой из областей D^\pm находится точка параметров (α, Ω) .

В [11] показано, что коэффициент непрерывного спектра $A(\eta)$ равен

$$A(\eta) = -\frac{\eta(1-\eta^2)}{z_0 I \lambda^+(\eta) \lambda^-(\eta)}, \quad \text{где } I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\lambda(i\tau)}.$$

Коэффициенты дискретного спектра равны

$$A_k = -\frac{2}{az_0 I \eta_k^2 \lambda'(\eta_k)}, \quad k = 0, 1.$$

Величину импеданса находим по формуле [1]

$$Z = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{e(0)}{e'(0)}.$$

Согласно граничному условию для поля $e(0) = 1$. Поэтому для импеданса справедливо следующее соотношение:

$$Z = \frac{4\pi i \omega}{c^2 e'(0)} = \frac{8\pi i \omega l}{c^2 z_0 \pi} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\lambda(i\tau)}. \quad (16)$$

5. Функция распределения электронов и электрическое поле

С помощью найденных коэффициентов непрерывного и дискретного спектров профиль электрического поля в полупространстве представим в явном виде

$$e(x) = -\frac{1}{I \lambda'(\eta_0)} \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta_0}\right) - \frac{1}{I \lambda'(\eta_1)} \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta_1}\right) - \frac{a}{2I} \int_0^1 \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta}\right) \frac{\eta^3 (1-\eta^2)}{\lambda^+(\eta) \lambda^-(\eta)} d\eta. \quad (17)$$

Формулу (17) будем использовать далее для анализа поведения электрического поля в полупространстве.

Рассмотрим профиль функции распределения электронов в полупространстве в явном виде. Представим функцию распределения в виде двух слагаемых $h(x, \mu) = h_d(x, \mu) + h_c(x, \mu)$, одно из которых $h_d(x, \mu)$ отвечает дискретному спектру, а второе $h_c(x, \mu)$ — непрерывному. С помощью равенства для коэффициентов дискретного и непрерывного спектров последние слагаемые запишем в виде

$$h_d(x, \mu) = -\frac{1}{z_0 I} \sum_{k=0}^1 \frac{\eta_k}{(\eta_k - \mu) \lambda'(\eta_k)} \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta_k}\right),$$

$$h_c(x, \mu) = -\frac{1}{z_0 I} \int_0^1 \exp\left(-\frac{z_0 x}{\eta}\right) \frac{\eta(1-\eta^2)}{\lambda^+(\eta) \lambda^-(\eta)} \Phi(\eta, \mu) d\eta.$$

На границе металла, т.е. при $x = 0$, последнее выражение вычислим в явном виде. Имеем

$$h_c(0, \mu) = \frac{1}{z_0 I 2\pi i} \int_0^1 \left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} \right) \frac{\eta d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu) \theta(\mu)}{z_0 I a i \pi \mu^2 (1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{\lambda^+(\mu)} - \frac{1}{\lambda^-(\mu)} \right), \quad \mu \in (-1, 1).$$

Здесь $\theta(\mu) = 1$, если $0 < \mu < 1$; $\theta(\mu) = 0$, если $-1 < \mu < 0$.

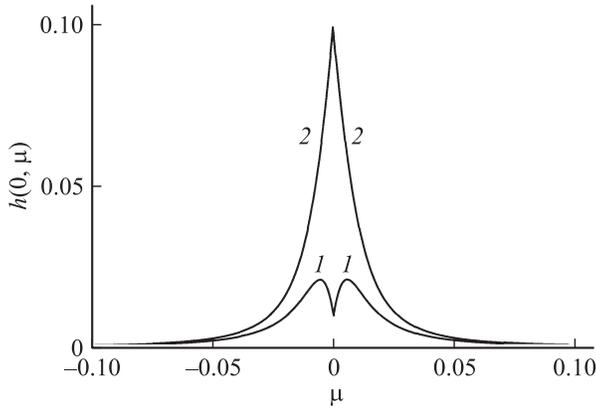


Рис. 2. Функции распределения для отраженных и движущихся к стенке электронов, 1 — действительная часть функции распределения, 2 — мнимая часть.

С использованием методов контурного интегрирования [11] для первого слагаемого находим, что

$$h_c(0, \mu) = \frac{1}{z_0 I} \left[\frac{\mu \lambda(\mu)(1 - \theta(\mu))}{\lambda^+(\mu)\lambda^-(\mu)} + \frac{\eta_0}{(\eta_0 - \mu)\lambda'(\eta_0)} + \frac{\eta_1}{(\eta_1 - \mu)\lambda'(\eta_1)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^2 d\tau}{\lambda(i\tau)(\tau^2 + \mu^2)} \right].$$

Складывая слагаемые функции распределения, отвечающие дискретному и непрерывному спектрам, окончательно получаем

$$h(0, \mu) = \frac{1}{z_0 I} \left[\frac{\mu \lambda(\mu)(1 - \theta(\mu))}{\lambda^+(\mu)\lambda^-(\mu)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^2 d\tau}{\lambda(i\tau)(\tau^2 + \mu^2)} \right].$$

Отсюда для функции распределения электронов, движущихся на границу металла (т.е. для случая $-1 < \mu < 0$), имеем

$$h(0, \mu) = \frac{1}{z_0 I} \left[\frac{\mu \lambda(\mu)}{\lambda^+(\mu)\lambda^-(\mu)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^2 d\tau}{\lambda(i\tau)(\tau^2 + \mu^2)} \right],$$

$$-1 < \mu < 0,$$

а для электронов, отраженных от границы металла, получаем

$$h(0, \mu) = \frac{1}{\pi z_0 I} \int_0^\infty \frac{\tau^2 d\tau}{\lambda(i\tau)(\tau^2 + \mu^2)}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Эти функции удовлетворяют зеркальному граничному условию $h(0, \mu) = h(0, -\mu)$.

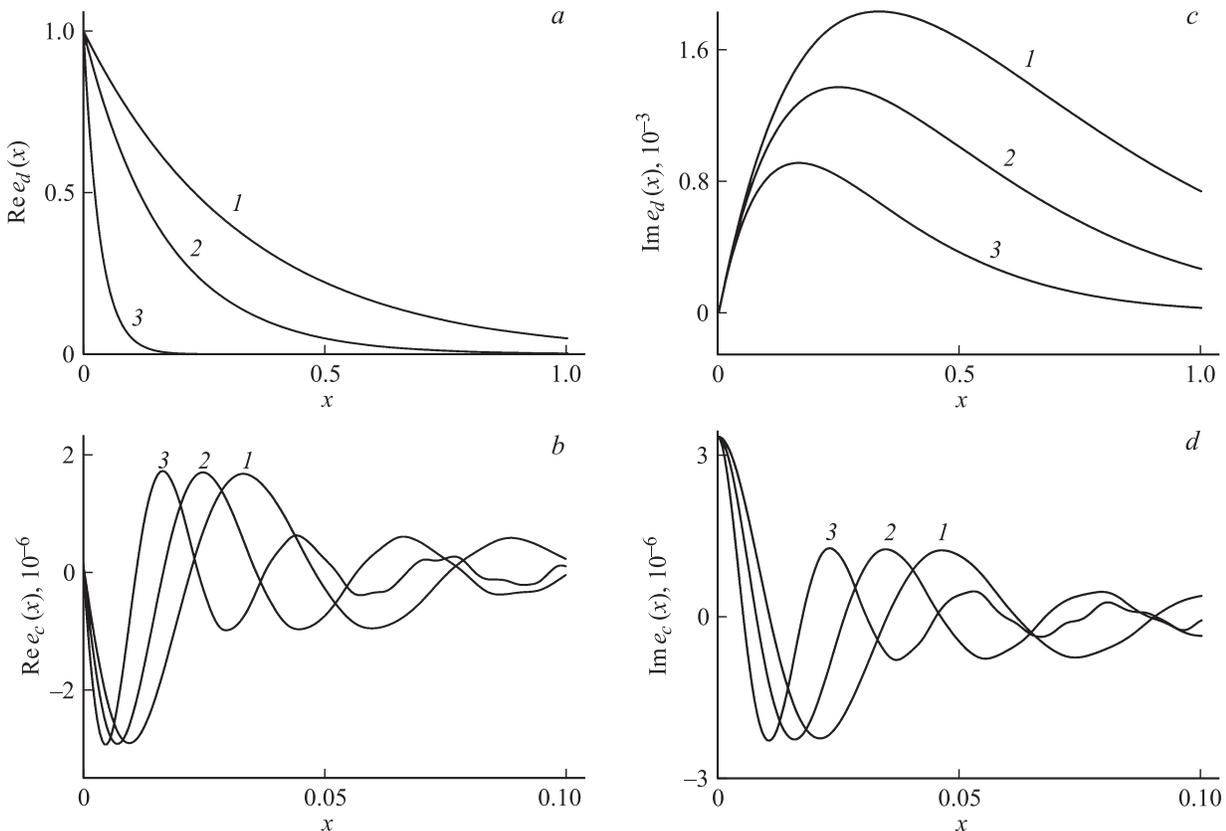


Рис. 3. Действительная (a, b) и мнимая (c, d) части электрического поля, отвечающие дискретному (a, c) и непрерывному (b, d) спектрам.

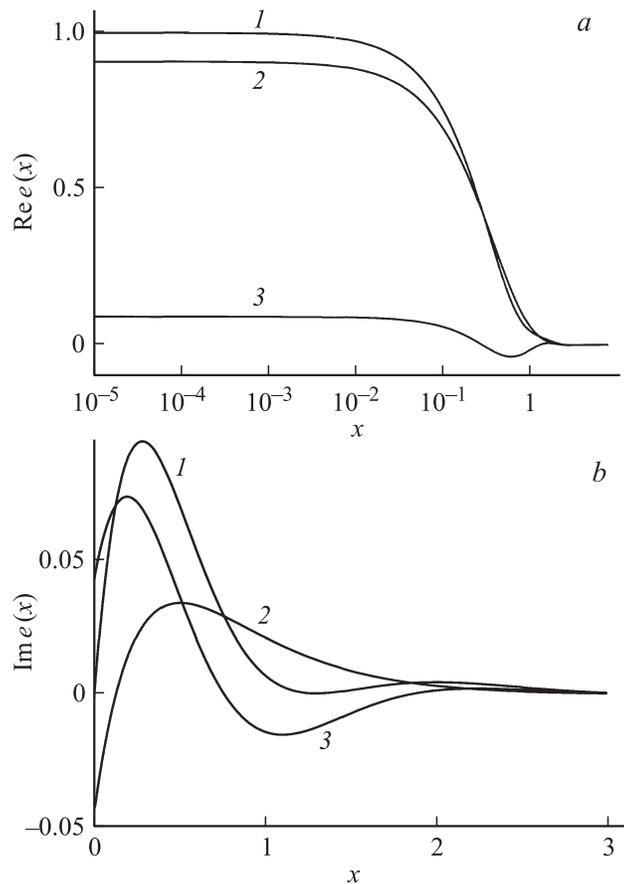


Рис. 4. Действительная (а) и мнимая (б) части электрического поля. Кривые 2 и 3 отвечают дискретному и непрерывному спектрам, 1 — их сумме.

На всех приводимых далее рисунках рассматривается типичный случай, когда отношение $v_F/c = 0.003$ (металл — литий).

Поведение действительной и мнимой частей функции распределения на границе представлено на рис. 2. В силу зеркальности граничного условия функции распределения отраженных от границы электронов ($0 < \mu < 1$) и движущихся к границе электронов ($-1 < \mu < 0$) симметричны относительно точки $\mu = 0$. Кривые построены для случая $\alpha = 1$, $\Omega = 10$; кривые 1 — это действительная часть функции распределения, кривые 2 — мнимая часть. Величина импеданса равна $Z = 0.226 - 2.258i$. Отметим, что функция распределения быстро спадает с ростом μ . Это обстоятельство является проявлением принципа неэффективности [2], согласно которому при аномальном скин-эффекте существенны только электроны, движущиеся почти параллельно поверхности, т.е. для которых величина μ много меньше единицы.

Действительная и мнимая части электрического поля вблизи границы (в слое Кнудсена) представлены на рис. 3 и 4. На рис. 3 кривые 1 отвечают параметрам $\alpha = 900$ и $\Omega = 100$, кривые 2 — параметрам $\alpha = 2133$ и $\Omega = 133$, кривые 3 — параметрам $\alpha = 7200$ и $\Omega = 200$. Это существенно аномальный случай.

Величина импеданса соответственно равна $Z = 0.051 - 10.05i$, $Z = 0.044 - 11.604i$, $Z = 0.036 - 14.212i$.

На рис. 3, а изображена действительная часть электрического поля $\text{Re } e_d(x)$, отвечающая дискретному спектру. С ростом параметра аномальности резко уменьшается глубина проникновения электрического поля в глубь металла.

На рис. 3, б представлена действительная часть электрического поля $\text{Re } e_c(x)$, отвечающая непрерывному спектру. По сравнению с действительной частью, соответствующей дискретному спектру, здесь амплитуда электрического поля много меньше: $|\text{Re } e_c(x)| < 3 \cdot 10^{-6}$.

Действительная часть поля $\text{Re } e_c(x)$, отвечающая непрерывному спектру, на шесть порядков меньше, чем действительная часть $\text{Re } e_d(x)$, отвечающая дискретному спектру.

Так что фактически величина действительной части поля определяется вблизи границы металла дискретным спектром (в случае сильно аномального скин-эффекта).

На рис. 3, с показана мнимая часть электрического поля $\text{Im } e_d(x)$, отвечающая дискретному спектру. С ростом параметра аномальности глубина проникновения мнимой части электрического поля в глубь металла

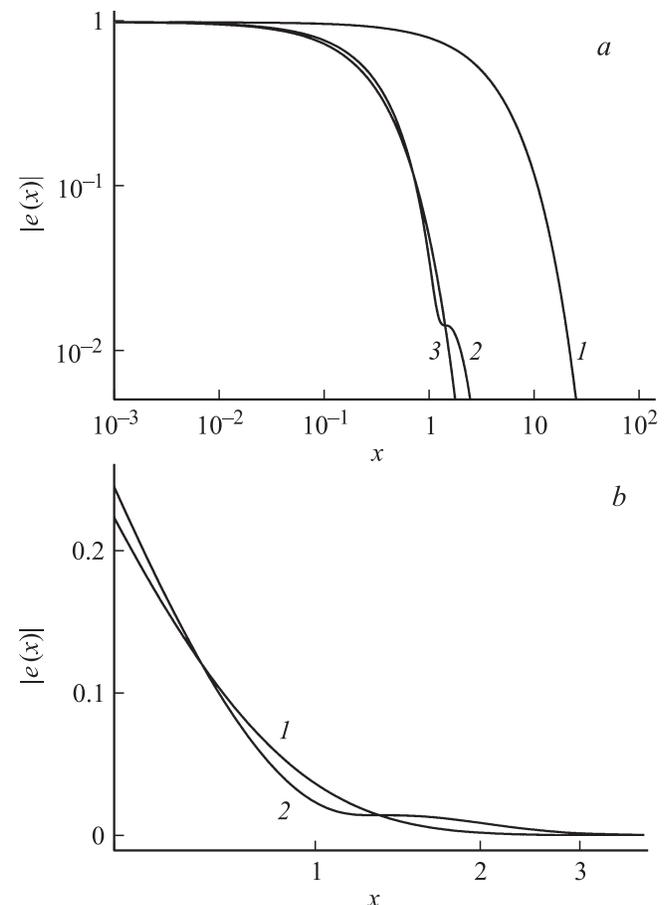


Рис. 5. Модуль электрического поля. а — логарифмический масштаб по обеим осям, б — логарифмический масштаб по оси x .

уменьшается медленно в отличие от глубины проникновения действительной части.

На рис. 3, *d* изображена мнимая часть электрического поля $\text{Im } e_c(x)$, отвечающая непрерывному спектру. Сравнивая величину мнимой части $\text{Im } e_c(x)$ с действительной $\text{Re } e_c(x)$, замечаем, что порядок амплитуды один и тот же: $|\text{Im } e_c(x)| < 3 \cdot 10^{-6}$. Так что фактически при указанных значениях параметра и мнимая величина поля определяется дискретным спектром. Однако величина мнимой части, отвечающая дискретному спектру, на три порядка меньше, чем величина действительной части поля, соответствующая дискретному спектру.

Как видно из графиков на рис. 3, вклад дискретного спектра при указанных выше значениях параметра в электрическое поле много больше вклада непрерывного спектра.

Итак, анализ величины электрического поля показывает, что в случае сильно аномального скин-эффекта величина электрического поля определяется вблизи границы металла дискретным спектром.

На рис. 4 рассматривается случай аномального скин-эффекта, параметр аномальности равен: $\alpha = 14$, а $\Omega = 2$. Это умеренно аномальный случай. Величина импеданса равна $Z = 0.44 - 1.475i$. На рис. 4, *a* изображена действительная часть электрического поля, на рис. 4, *b* — мнимая часть электрического поля, кривые 2 и 3 отвечают дискретному и непрерывному спектрам ($e_d(x)$ и $e_c(x)$), кривая 1 — их сумма — $e(x) = e_d(x) + e_c(x)$.

Из анализа рис. 4, *a, b* видно, что величина электрического поля определяется в равной степени как непрерывным, так и дискретным спектрами в отличие от сильно аномального случая, рассмотренного выше, когда величина электрического поля в основном определялась дискретным спектром.

На рис. 5, *a, b* изображен модуль электрического поля в случае нормального (кривая 1) и аномального (кривые 2 и 3) скин-эффектов. Кривая 1 отвечает параметрам $\alpha = 0.00675$, $\Omega = 0.01$, кривая 2 — $\alpha = 6.75$, $\Omega = 1$, кривая 3 — $\alpha = 675$, $\Omega = 100$.

Из рис. 5, *a* видно, что модуль электрического поля в аномальном случае убывает на порядок быстрее, чем в нормальном. Величина импеданса соответственно равна: $Z = 0.7 - 0.717i$, $Z = 0.537 - 1.169i$, $Z = 10.05i$.

6. Заключение

В настоящей работе показано, что электрическое поле и функция распределения электронов в задаче о скин-эффекте определяются своими частными решениями. Они представляют собой суммы решений дискретного спектра (частных убывающих решений) и непрерывного спектра (решения интегрального вида).

Нули дисперсионной функции, как показано, требуются для аналитического решения задачи, и, в частности, для предъявления в явном виде электрического поля и функции распределения электронов в полупространстве.

Важность исследования числа нулей дисперсионной функции отмечается в работах [8,9,13].

Проведенный в работе анализ показывает, что величина электрического поля в задаче о скин-эффекте определяется в основном дискретным спектром в случае сильно аномального скин-эффекта.

Вклад дискретного и непрерывного спектров в электрическое поле сравним по величине в случае аномального скин-эффекта.

Величина мнимой части электрического поля при любых значениях параметров аномальности много меньше величины действительной части.

С ростом параметра аномальности величина мнимой части поля резко убывает.

Список литературы

- [1] А.А. Абрикосов. Основы теории металла. Наука, М. (1977). 288 с.
- [2] Дж. Займан. Электроны и фононы. ИЛ, М. (1962). 488 с.
- [3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1992). 532 с.
- [4] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Физическая кинетика. Наука, М. (1979). 528 с.
- [5] G.E.H. Reuter, E.H. Sondheimer. Proc. Roy. Soc. A **195**, 336 (1948).
- [6] R.V. Dingle. Physica **19**, 311 (1953).
- [7] В.Л. Гинзбург, Г.П. Мотулевич. УФН **55**, 4, 469 (1955).
- [8] В.М. Гохфельд, М.А. Гулянский, М.И. Каганов, А.Г. Плявенек. ЖЭТФ **89**, 3 (9), 985 (1985).
- [9] В.М. Гохфельд, М.А. Гулянский, М.И. Каганов. ЖЭТФ **92**, 2, 523 (1987).
- [10] И.Ф. Волошин, В.Г. Скобов, Л.М. Фишер, А.С. Чернов. ЖЭТФ **80**, 1, 183 (1981).
- [11] А.В. Латышев, А.А. Юшканов. Журн. вычисл. математики и мат. физики **39**, 6, 989 (1999).
- [12] N.A. Zimbovskaya. ArXiv: physics/cond-mat/0506269.
- [13] А.Ф. Александров, Л.С. Богданкевич, А.А. Рухадзе. Основы электродинамики плазмы. Высш. шк., М. (1988). 434 с.
- [14] К.М. Кейз, П.Ф. Цвайфель. Линейная теория переноса. Мир, М. (1972). 384 с.