

## К ВОПРОСУ ОБ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТАЛЛА ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОННОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПЕРЕХОДА

Я. М. Блантер, А. В. Панцулая

Исследуется продольное магнитосопротивление металла, находящегося вблизи электронного топологического перехода (ЭТП). Обнаружено, что при определенных условиях его зависимость от магнитного поля имеет осциллирующий характер. Эти осцилляции обусловлены зависимостью времени релаксации электронов в магнитном поле от энергии и присущи нормальным металлам независимо от формы Ферми-поверхности. Тем не менее вблизи ЭТП существенно изменяется как их форма, так и амплитуда. Установлено, что в сильных магнитных полях аномалия магнитосопротивления возрастает.

В последние годы заметно возрос интерес к исследованию кинетики электронов проводимости металла, претерпевающего электронный топологический переход (ЭТП), предсказанный Лифшицем [1]. В ряде экспериментов обнаружено, что термоэдс вблизи ЭТП при гелиевых температурах демонстрирует гигантскую аномалию [2-5]. В работах [6-8] появление пика в зависимости термоэдс от параметра  $\Delta$ , характеризующего близость электронной системы к ЭТП, объяснено спецификой процессов электрон-примесного рассеяния. В случае чистого металла, когда  $T\tau \gg 1$  ( $T$  — температура,  $\tau$  — время релаксации электронов,  $\hbar=1$ ), величина пика термоэдс превышает ее фоновое значение в  $(\epsilon_F/A)^{1/2}$  раз, где  $\epsilon_F$  — энергия Ферми,  $A = \max\{T, |\Delta|\}$  [7].

Сложнее обстоит дело с экспериментальным наблюдением аномалии в проводимости  $\sigma$ , которая имеет вид сглаженного излома  $\sigma \sim \sigma_0 (A/\epsilon_F)^{1/2}$ . Например, в экспериментах [2] особенность сопротивления сплава  $\text{Li}_{1-x}\text{Mg}_x$  вблизи критической точки  $x_c \sim 0.2$  практически лежит в пределах экспериментальной погрешности, что не позволяет по этим измерениям надежно констатировать ЭТП в  $\text{Li}_{1-x}\text{Mg}_x$ , хотя наблюдаемая аномалия термоэдс этого соединения однозначно свидетельствует о наличии перехода. Однако уже при исследовании сплава  $\text{Cd}_{1-x}\text{Mg}_x$  [3] в зависимости сопротивления от концентрации  $x$  удалось обнаружить излом, характерный вид которого качественно совпадал с зависимостью, приведенной в работе [7]. Подобный излом наблюдался и при растяжении висковеров кадмия [9] вдоль оси  $\langle 1210 \rangle$  при  $T=0.6$  К. Аномалии в сопротивлении вблизи ЭТП исследовались и при анизотропной деформации монокристаллов  $\text{Bi-Sb}$  [4] и растяжении висковеров алюминия [10]. Вообще говоря, экспериментальное наблюдение такой относительно малой добавки к сопротивлению, обусловленной ЭТП, представляет собой сложную задачу, решение которой обычно сопряжено со значительными трудностями.

Поэтому, на наш взгляд, весьма важными представляются результаты недавно выполненных экспериментов по изучению влияния магнитного поля на аномалию термоэдс монокристаллов  $\text{Cd}$  вблизи ЭТП [11]. Как известно [12], при давлениях, близких к  $P_c=16$  кбар, в кадмии осуществляется сложное изменение топологии Ферми-поверхности — смыкание «рука-

вов» дырочного «монстра» во второй зоне и возникновение электронной «иглы» в третьей. В [11] авторы, меняя давления вблизи  $P_c$ , наблюдали отчетливый пик в зависимости термоэдс от давления, высота которого существенно зависела от величины приложенного магнитного поля. С одной стороны, от перехода зависимость термоэдс от  $H$  практически отсутствовала, с другой — проявлялась заметно, при этом вблизи ЭТП в полях вплоть до 6 Тл с ростом поля пик термоэдс монотонно возрастал. По аналогии можно предположить, что воздействие магнитного поля на особенность проводимости металла, обусловленную ЭТП, также приведет к возрастанию ее относительной величины и к своеобразной зависимости проводимости от магнитного поля по разные стороны от перехода.

В настоящей работе в рамках модели ЭТП типа «разрыв перемиčky» мы вычислим продольную проводимость металла вблизи ЭТП в магнитном поле, направленном вдоль оси перемиčky. Такая геометрия позволяет отвлечься от эффектов, связанных с изменением динамики электрона на критической поверхности [1], и изучать особенности проводимости, обусловленные совместным влиянием ЭТП и магнитного поля на время электрон-примесной релаксации.

## 1. Модель и время электронной релаксации вблизи ЭТП при наличии магнитного поля

Модель ЭТП «разрыв перемиčky» подробно обсуждалась в [13], где были исследованы аномалии продольной магнитотермоэдс в окрестности ЭТП. Перемиčka поверхности Ферми моделируется с помощью гипербо-

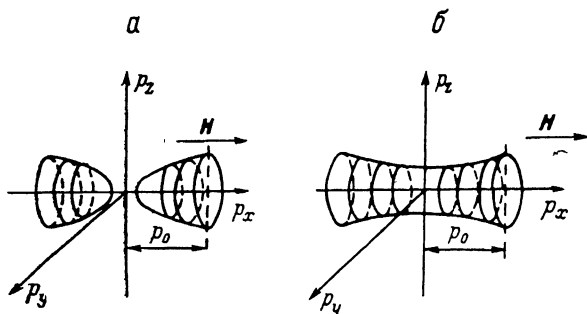


Рис. 1. Поверхность Ферми металла при ЭТП «разрыв перемиčky».

$p_0$  — предельное значение продольного импульса.  $\Delta < 0$  (а),  $\Delta > 0$  (б).

лоида вращения (рис. 1). Однополостный гиперболоид при этом соответствует открытой, а двуполостный — замкнутой Ферми-поверхности [7, 8]. Число электронов проводимости  $n_s$  определяет предельное значение продольного импульса  $p_0$ . Будем считать  $\hbar=1$ .

Энергия электрона проводимости в такой модели в присутствии магнитного поля  $H$  может быть записана в виде

$$E_{s\pm}(p_x) = \mu - \Delta - p_x^2/2m_s + \Omega(n + 1/2) \mp eH/2m_s c, \quad (1)$$

где  $\mu$  — химический потенциал;  $\Omega = eH/m_s c$  — циклотронная частота;  $m_x$ ,  $m_\perp$ ,  $m_s$  — продольная, поперечная и спиновая массы электрона. Мы положим для простоты  $m_s = m_\perp$ . Значение  $E_c = \mu - \Delta$  соответствует точке перехода при  $T=0$  в отсутствие магнитного поля и примесного рассеяния. Каждому номеру уровня Ландау  $n$  и спиновым индексам « $\pm$ » отвечает свой импульс Ферми  $p_{0n\pm}$ , определяемый из условия

$$p_{0n\pm} = \{2m_x [\Omega(n + 1/2) - \Delta \mp eH/2m_s c]\}^{1/2} = \{2m_x [\Omega(n + 1/2) - \Delta_\pm]\}^{1/2}, \quad (2)$$

где

$$\Delta_\pm = \Delta \pm eH/2m_s c = \Delta \pm \Omega/2.$$

Максимальное число уровней  $N_{\max}$  определяется из условия

$$n_e = \frac{eH}{2\pi^2c} \sum_{n=0}^{N_{\max}} p_{0n\pm}, \quad (3)$$

в котором учтено вырождение уровней Ландау. Суммирование проводится по всем действительным  $p_{0n\pm}$ .

В случае, когда взаимодействие электрона с примесью не зависит от электронного спина, проекция последнего не меняется в процессах рассеяния и можно рассматривать токи от электронов с различными проекциями спина независимо. Для определенности рассмотрим электрон с проекцией спина  $+1/2$ .

Состояние электрона проводимости в магнитном поле  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{p}_z$  характеризуется квантовыми числами  $n$  и  $p_z$ , поэтому выражение для вероятности рассеяния на примеси в этом случае имеет вид [14]

$$W_+(\varepsilon) = 2\pi N_i |U|^2 \int dp_z \sum_n \delta(E_{n+}(p_z) - \varepsilon) \frac{eH}{2\pi^2c}, \quad (4)$$

где  $N_i$  — число рассеивающих центров в единице объема;  $U$  — борновская амплитуда рассеяния (считаем его для простоты изотропным), а  $E_{n+}(p_z)$  определяется соотношением (1).

Проинтегрировав (4) по импульсам  $p_z$ , получим

$$W_+(\omega) = W_0 \frac{\Omega}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_{m=0}^{N_{\max}^+} \frac{\theta(-\varepsilon_m(\omega))}{\sqrt{|\varepsilon_m(\omega)|}}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_m(\omega) = \omega + \Delta_+ - \Omega(m + 1/2)$ ;  $\omega = \varepsilon - \mu$ ;  $\theta(x)$  — [эта-функция Хевисайда;  $\varepsilon_0 = p_0^2/2m_z$ ,  $W_0 = N_i |U|^2 m_\perp p_0/\pi$  — борновская вероятность рассеяния электрона на примеси вдали от перехода;  $N_{\max}^+$  — максимальное число уровней Ландау, определяющее наибольшее сечение поверхности Ферми  $S_0$

$$S_0 = 2\pi m_\perp \Omega (N_{\max}^+ + 1/2). \quad (6)$$

Применяя формулу Пуассона стандартным образом [14], перейдем в (5) от суммирования к интегрированию, и для [времени релаксации  $\tau(\omega, \Delta_+, \Omega) = W_+^{-1}(\omega)$  окончательно получим [13]

$$\tau(\omega, \Delta_+, \Omega) = \tau_1(\omega, \Delta) + \tau_2(\omega, \Omega) + \tau_3(\omega, \Omega, \Delta), \quad (7)$$

где

$$\tau_1(\omega, \Delta) = \tau_0 \left[ 1 + \frac{\omega}{2\varepsilon_0} + \left( \sqrt{\frac{|\omega + \Delta|}{\varepsilon_0}} + \frac{|\omega + \Delta|}{\varepsilon_0} \right) \theta(-\omega - \Delta) \right],$$

$$\tau_2(\omega, \Omega) = \tau_0 R (\Omega/2\varepsilon_0)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-1/2} \cos(\varphi(\varepsilon_0) - \pi/4),$$

$$\tau_3(\omega, \Omega, \Delta) = -\tau_0 R (\Omega/\varepsilon_0)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-1/2} [\cos \varphi(\varepsilon_0) C(\varphi(-\Delta)) + \sin \varphi(\varepsilon_0) S(\varphi(-\Delta))] \theta(-\omega - \Delta),$$

$$\tau_0 = W_0^{-1}, \quad \varphi(x) = \frac{2\pi k}{\Omega} (x - \omega), \quad (8)$$

$R = 2 |A|^2 (p_0 m_\perp / 2\pi)^2 - 1$  — множитель, [связанный] с отличием [в] магнитном поле борновской амплитуды рассеяния от [истинной]

$$A = U \left[ 1 + i \frac{\sqrt{2m_z} eHU}{4\pi c} \sum_{m=0}^{N_{\max}^+} \frac{\theta(-\varepsilon_m(\omega))}{\sqrt{|\varepsilon_m(\omega)|}} \right], \quad (9)$$

$$\begin{cases} C(a) \\ S(a) \end{cases} = (2\pi)^{-1/2} \int_0^a \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases} \frac{dt}{\sqrt{t}}. \quad (10)$$

Расчет времени релаксации электрона с проекцией спина —  $1/2$  приводит к тождественному результату.

Входящее в соотношение (8) время  $\tau_1$  уже встречалось ранее [7, 8]. Оно описывает процессы электрон-примесного рассеяния вблизи ЭТП в отсутствие магнитного поля:  $\tau_0$  — обычное рассеяние из периферийной области в периферийную же, а член с  $\theta$ -функцией отвечает процессам рассеяния из периферийных областей в особую. Следует отметить, что описываемая им вероятность рассеяния в особую область  $\tau_0^{-1} (|\omega + \Delta|/\epsilon_0)^{1/2}$  в действительности не зависит от параметра модели  $\epsilon_0$ , поскольку  $\tau_0^{-1} \sim \epsilon_0^{1/2}$ .

Влияние магнитного поля на процессы рассеяния сказывается появлением в  $\tau(\omega, \Delta, \Omega)$  слагаемого  $\tau_2 + \tau_3$ . Так, при  $T=0$   $\tau_2$  соответствует добавке во время релаксации для случая однополостного гиперболюида ( $\Delta > 0$ ). В противном случае ( $\Delta < 0$ ), когда перемычка оказывается разорванной, отличным от нуля становится и вклад  $\tau_3$ , который, как мы увидим ниже, приводит к сильной компенсации осциллирующей добавки к проводимости. Однако в слагаемых  $\tau_2$  и  $\tau_3$  параметр  $\epsilon_0$  фигурирует уже и в качестве фазы осциллирующих тригонометрических и френелевских функций. Это объясняется тем, что рассматриваемая модель имеет отношение к действительности лишь вблизи перемычки. Если ею пользоваться буквально, то интеграл по  $p_x$  в (4) удастся взять точно, но результат при этом определяется величиной предельного сечения  $S_0$ . Это, вообще говоря, не есть экстремальное сечение поверхности Ферми, так как  $(\partial S/\partial p_x)_{\epsilon=\epsilon_0} \neq 0$ . В действительности же ясно, что вдали от перемычки реальная Ферми-поверхность обязательно имеет некоторые максимальные сечения, которые и определяют величину поправки во время релаксации, а также период осцилляций при изменении магнитного поля [15]. При этом если последний определяется именно сечением  $S_{\max}$ , то сама величина поправки, которая вычисляется методом перевала около точки  $S_{\max}$ , зависит от производной  $(\partial^2 S/\partial p_x^2)_{p_x=p_{\max}}$ . В нашей модели роль  $S_{\max}$  играет  $S_0$ , и с этой точки зрения наличие осцилляций и их период она отражает верно. При этом величина  $\tau_2 + \tau_3$  оказывается не зависящей ни от  $S_{\max}$ , ни от его производных. Это в данном случае является недостатком модели и говорит о том, что полученные результаты не могут претендовать на количественное описание эффекта, однако качественно правильно описывают его. Более того, можно утверждать, что «выполаживание» реальной Ферми-поверхности вблизи экстремального сечения приведет к возрастанию амплитуды осцилляций времени релаксации по сравнению с (8).

## 2. Общее выражение для проводимости

Перейдем к нашей основной задаче — вычислению проводимости металла, находящегося вблизи ЭТП при наличии магнитного поля. Ниже мы будем интересоваться компонентой  $\sigma_{xx}$  тензора проводимости, которая равна, как обычно [14]

$$\sigma_{xx} = -\frac{e^2}{4T} \int d^3p V_{\vec{r}}^2 \tau(\epsilon) / \text{ch}^2\left(\frac{\epsilon - \mu}{2T}\right). \quad (11)$$

Проинтегрировав по углам, получаем

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\omega, \Delta, \Omega)}{\tau_0} \frac{d(\omega/2T)}{\text{ch}^2(\omega/2T)}. \quad (12)$$

где  $\sigma_0 = e^2 m_{\perp} \tau_0 (2\varepsilon_0)^{1/2} / 3\pi^2 \sqrt{m_z}$  — проводимость нормального металла с изотропной поверхностью Ферми. Заметим, что в (12) уже проведено суммирование по проекциям спина, которое уничтожило спиновую двойку в знаменателе этого выражения. Легко видеть, что соотношение (12) представляет собой слегка видоизмененную стандартную формулу для проводимости, а аномалии в кинетических коэффициентах в случае ЭТП при наличии магнитного поля по-прежнему определяются особенностями во времени релаксации электронов проводимости вблизи поверхности Ферми.

Подставляя в (12) явное выражение для  $\tau$  ( $\omega$ ,  $\Delta$ ,  $\Omega$ ) (8), находим, что проводимость  $\sigma_{zz}(\omega, \Delta, \Omega)$  может быть представлена в виде суммы трех слагаемых:  $\sigma_s$  — обычной фоновой и аномальной частями проводимости при ЭТП в отсутствие магнитного поля;  $\sigma_H$  — осциллирующей добавки Шубникова—де Гааза, обусловленной влиянием поля на кинетику электронов проводимости безотносительно близости системы к ЭТП;  $\sigma_{Hs}$  — вклада, обусловленного влиянием магнитного поля на особую часть проводимости вблизи ЭТП.

Вычисленный, согласно (12), вклад  $\sigma_s$  совпадает с найденным ранее [7]

$$\sigma_s(\Delta, T) = \sigma_0 \begin{cases} 1 + (|\Delta|/\varepsilon_0)^{1/2}, & \Delta \leq -T, \\ 1 + 0.54 (T/\varepsilon_0)^{1/2} (1 - 0.68\Delta/T), & |\Delta| \leq T, \\ 1 + 0.89 (T/\varepsilon_0)^{1/2} \exp(-\Delta/T), & T \leq \Delta \leq T \ln(T\tau). \end{cases} \quad (13)$$

Отметим, что ввиду ненужных усложнений мы не рассматриваем здесь область  $\Delta \geq T \ln(T\tau)$ , где  $\sigma_s = \sigma_0 [1 + 0.25\tau^{-1} (\varepsilon_0 \Delta)^{-1/2}]$ .

Для вычисления  $\sigma_H$  подставим в (12)  $\tau_2$  из (8). Интегрируя по  $\omega$ , получим выражение для проводимости, описывающее обычные осцилляции Шубникова—де Гааза [14, 16]

$$\sigma_H = \sigma_0 R (\Omega/2\varepsilon_0)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \psi\left(\frac{2\pi^2 k T}{\Omega}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{\Omega} \varepsilon_0 - \frac{\pi}{4}\right), \quad \psi(k\lambda) = \frac{k\lambda}{\text{sh}(k\lambda)}. \quad (14)$$

В случае слабых полей ( $\Omega \ll 2\pi^2 T$ ) ввиду экспоненциального убывания членов ряда (14) достаточно ограничиться первым слагаемым суммы

$$\sigma_H = -4\pi^2 \sigma_0 R T (2\varepsilon_0 \Omega)^{-1/2} e^{-2\pi^2 T/\Omega} \cos(2\pi\varepsilon_0/\Omega - \pi/4). \quad (15)$$

В случае сильных полей экспоненциальное убывание членов этого ряда начинается лишь с  $k_0 \sim \Omega/2\pi^2 T$ . До этого мы можем воспользоваться асимптотическим значением при малых аргументах функции  $\psi(x) = 1 - x^2/6$ .

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \sigma_0 R \sqrt{\frac{\Omega}{2\varepsilon_0}} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{2\pi\varepsilon_0}{\Omega} k - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\sigma_0 R}{2} \sqrt{\frac{\Omega}{\varepsilon_0}} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \left[ \cos \frac{2\pi\varepsilon_0}{\Omega} k - \sin \frac{2\pi\varepsilon_0}{\Omega} k \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

При  $\Omega_{N+1/2}$  таких, что  $\varepsilon_0/\Omega_{N+1/2} = N + 1/2$  ( $N$  — целое число),  $\sin(2\pi\varepsilon_0/\Omega) \times \times k = 0$ , а  $\cos(2\pi\varepsilon_0/\Omega) k = (-1)^k$ . Тогда

$$\sigma_H \sim \sigma_0 R \sqrt{\Omega/\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \sigma_0 R (\Omega/\varepsilon_0)^{1/2} (\Omega/T)^{1/2}.$$

Во всех остальных особых точках  $\Omega = \Omega_{N+1/2}$ , ряд (16) также можно оценить подобно тому, как это было сделано в [13]. Оказывается, что значения  $\sigma_H$  всюду, за исключением точек  $\Omega_{N+1/2}$ , лежат внутри полосы  $\pm \sigma_0 R \sqrt{\Omega/\varepsilon_0}$ .

На рис. 2 приведены результаты численного расчета  $\sigma_H(\Omega)$  в области промежуточных и сильных полей. Легко видеть, что существенно ангармо-

нический вид осцилляций в области  $2\pi^2 T/\Omega \ll 1$  постепенно приобретает квазигармонический характер при более слабых полях.

Перейдем к вычислению особой части проводимости  $\sigma_{Hs}(\Delta, T, \Omega)$ , учитывая влияние, которое оказывает магнитное поле на особенность проводимости вблизи ЭТП.

Формально эта величина определяется вкладом  $\tau_3$  в общем выражении (8). Пренебрегая малыми слагаемыми в подынтегральной функции (12), содержащими степени  $(|\omega + \Delta|/\varepsilon_0)^{1/2}$  и выше, и

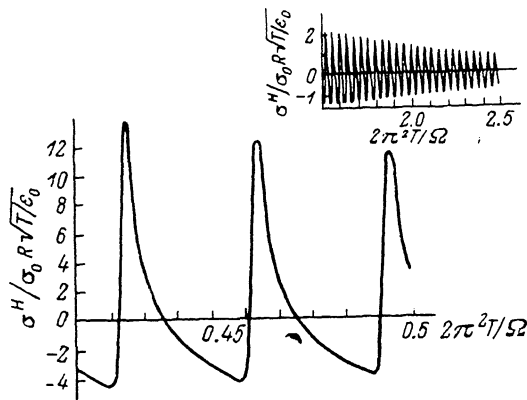


Рис. 2. Результаты численного расчета зависимости  $\sigma_H$  от магнитного поля ( $\varepsilon_0/T=500$ ).

преобразуя интегралы Френеля в неполную  $\gamma$ -функцию Эйлера, находим

$$\sigma_{Hs}(\Delta, \Omega, T) = \frac{\sigma_0 R}{2\pi^{1/2}} \left(\frac{\Omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} e^{i\left(\frac{2\pi\varepsilon_0}{\Omega} k - \pi/4\right)} \times \int_{\Delta/2T}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} e^{\frac{4\pi i k T}{\Omega} x} \gamma\left(\frac{1}{2}, i \frac{4\pi k T}{\Omega} \left(x - \frac{\Delta}{2T}\right)\right). \quad (17)$$

Исследуем теперь это общее выражение в различных областях окрестности перехода.

$\Delta \ll -T$  (двухполостный гиперboloид). В этой области значений  $\Delta$  после разложения  $\gamma$ -функции по параметру  $xT/|\Delta|$  (существенны  $x \ll 1$ ) интеграл в (17) может быть преобразован к более простому виду

$$\sigma_{Hs} = \frac{\sigma_0 R}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} e^{i\left(\frac{2\pi\varepsilon_0}{\Omega} k - \pi/4\right)} \left\{ e^{-i\pi/4} \gamma\left(\frac{1}{2}, i \frac{2\pi k |\Delta|}{\Omega}\right) \psi\left(\frac{2\pi^2 k T}{\Omega}\right) + i e^{-i k \frac{2\pi^2 |\Delta|}{\Omega}} 2T \sqrt{\frac{2k\pi}{\Omega |\Delta|}} \psi_1\left(\frac{2\pi^2 k T}{\Omega}\right) \right\}, \quad (18)$$

где

$$\psi_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{t \sin(2x/\pi \cdot t)}{\operatorname{ch}^2 t} dt = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} x} (x \operatorname{cth} x - 1) = \begin{cases} \pi x e^{-x}, & x \gg 1, \\ \frac{\pi}{6} x \left(1 - \frac{7}{30} x^2\right), & x \ll 1 \end{cases} \quad (19)$$

оказывается полной производной от функции

$$\psi(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x} \quad (\psi_1(x) = (-\pi/2) \psi'(x)).$$

Для не слишком сильных полей ( $\Omega \ll |\Delta|$ ) неполная  $\gamma$ -функция также может быть заменена своей асимптотикой при больших значениях аргумента

$$\gamma(1/2, x) = \sqrt{\pi} - x^{-1/2} e^{-x}, \quad (20)$$

после чего главная часть вклада от первого слагаемого в фигурных скобках (18) оказывается в точности равной по величине и противоположной

по знаку вклада  $\sigma_H(\Omega, T)$ . Таким образом, в области  $\Omega \ll |\Delta|$  и  $T \ll |\Delta|$

$$\sigma_H + \sigma_{Hs} = \sigma_0 R \frac{\Omega}{2\pi \sqrt{\varepsilon_0} |\Delta|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin\left(\frac{2\pi \varepsilon_0 k}{\Omega}\right) \times \\ \times \left[ \psi\left(\frac{2\pi^2 k T}{\Omega}\right) + \frac{4\pi k T}{\Omega} \psi_1\left(\frac{2\pi^2 k T}{\Omega}\right) \right]. \quad (21)$$

В слабых полях  $\Omega \ll 2\pi^2 T$  ввиду экспоненциального характера убываниялагаемых этой суммы достаточно ограничиться лишь членом с  $k=1$

$$\sigma_H + \sigma_{Hs} = 4\pi^3 \sigma_0 R \frac{T^2}{\Omega \sqrt{\varepsilon_0} |\Delta|} e^{-2\pi^2 T/\Omega} \sin\left(\frac{2\pi}{\Omega} \varepsilon_0\right). \quad (22)$$

В области сильных полей  $\Omega > 2\pi^2 T$ , обрывая суммирование на номерах  $\sim k_0$ , находим, что

$$\sigma_H + \sigma_{Hs} = \frac{\sigma_0 R \Omega}{2\pi \sqrt{\varepsilon_0} |\Delta|} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{(-1)^k}{k} \sin\left(\frac{2\pi k}{\Omega} \varepsilon_0\right) \left[ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi^2 k T}{\Omega}\right)^2 \right]. \quad (23)$$

Оказывается, эти суммы могут быть явно вычислены для  $k_0 \gg 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} = \frac{x}{2}, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k \sin kx = \\ = \sec^2 \frac{x}{2} [(-1)^n (n+1) \sin nx + (-1)^n n \sin (n+1)x], \quad -\pi \leq x < \pi. \quad (24)$$

Сведем аргументы тригонометрических функций в (23) к виду  $kx$ , где  $|x| < \pi$ . Это можно сделать путем представления  $\varepsilon_0/\Omega = s_0/2\pi m_1 \Omega$  в виде

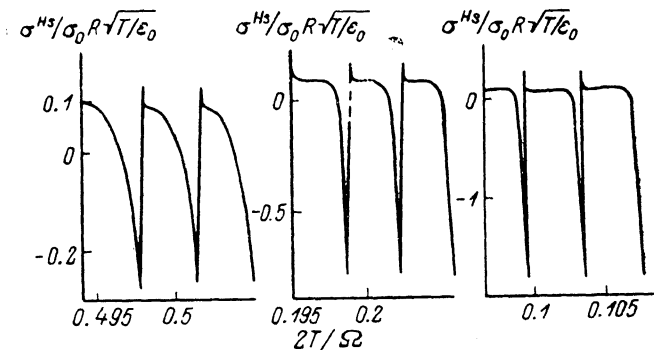


Рис. 3. Результаты численного расчета полной магнитопроводимости  $\sigma_H + \sigma_{Hs}$  в зависимости от внешнего поля.  $(\varepsilon_0 + \Delta)/T = 500$ ,  $\Delta \ll -T$ .

С увеличением поля синусоидальные осцилляции сменяются пилообразными.

$s_0/2\pi m_1 \Omega = N + r$ , где  $N$  — целое число;  $r$  обозначает дробную часть, тогда  $\sigma_H + \sigma_{Hs}$  в рассматриваемой области принимает вид

$$\sigma_H + \sigma_{Hs} = -\frac{\sigma_0 R \Omega}{2 \sqrt{\varepsilon_0} |\Delta|} r, \quad -1/2 \leq r < 1/2. \quad (25)$$

Таким образом, величина  $\sigma_H + \sigma_{Hs}$  при  $2\pi^2 T < \Omega < |\Delta|$  быстро осциллирует по пилообразному закону (25) в пределах полосы

$$|\sigma_H + \sigma_{Hs}| \leq \sigma_0 R \Omega / \sqrt{\varepsilon_0} |\Delta|. \quad (26)$$

Результаты численного расчета зависимости  $\sigma_H(\Omega) + \sigma_{Hs}(\Omega)$  (21) в области  $(\Omega \sim T) \ll |\Delta|$  представлены на рис. 3.

В области самых сильных полей  $\Omega > |\Delta|$  экспоненциальное убывание членов суммы (21), как и в предыдущем случае, начинается с  $k_0 \sim \Omega/2\pi^2 T \gg 1$ , однако при  $1 \leq k \leq \Omega/|\Delta|$  нельзя пользоваться асимптотикой (20) для  $\gamma$ -функции. Рассмотрим вначале сумму с  $k \leq k_1 \sim \Omega/2\pi^2 |\Delta|$ , при этом  $\gamma$ -функция может быть представлена в виде

$$\gamma\left(\frac{1}{2}, i \frac{2\pi|\Delta|}{\Omega} k\right) = \left(\frac{2\pi|\Delta|}{\Omega}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(\pi/4 - \frac{2\pi k|\Delta|}{\Omega}\right)\right], \quad (27)$$

для величины  $\sigma_{Hs}$  получим

$$\sigma_{Hs} = \sigma_0 R (|\Delta|/\varepsilon_0)^{1/2} \sum_{k=1}^{k_1} (-1)^{k+1} \cos\left(\frac{2\pi k}{\Omega} \frac{s_0}{2\pi m_1}\right). \quad (28)$$

Очевидно, что величина суммы по  $k$  в выражении (28) порядка единицы, если  $s_0/2\pi m_1 \Omega \neq N + 1/2$ , и порядка  $\sim k_1$  в противном случае. Поправка от

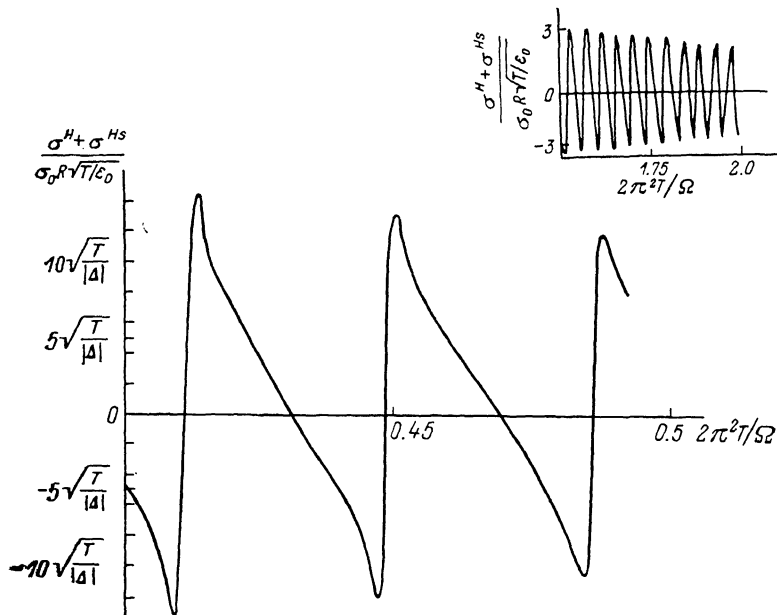


Рис. 4. Результаты численного расчета зависимости  $\sigma_{Hs}$  ( $\Delta/T=2$ ) от магнитного поля.  $s_0/2\pi^2 m_1 T=500$ .

С увеличением поля глубина «скважин» увеличивается, а их ширина уменьшается.

суммы членов с  $k$ , лежащими в интервале  $k_1 < k < k_0$ , оказывается малой и может быть отброшена. Таким образом, в области  $\Omega > |\Delta|$  величина  $\sigma_{Hs}$  осциллирует в пределах полосы  $|\sigma_{Hs}| \leq \sigma_0 R \sqrt{|\Delta|/\varepsilon_0}$ , а вблизи особых точек  $\Omega_{N+1/2}$  в этой зависимости возникают резкие пики, амплитуда которых линейно увеличивается с ростом  $\Omega$ :  $\sigma_{Hs} \sim \sigma_0 R (|\Delta|/\varepsilon_0)^{1/2} \Omega/|\Delta|$ .

$\Delta > 0$  (однополостный гиперболоид). Возвращаясь в (17) к интегральному представлению  $\gamma$ -функции, изменяя порядок интегрирования и учитывая, что

$$\int_i^\infty \left\{ \frac{\cos a(x-t)}{\sin a(x-t)} \right\} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{ne^{-2nt}}{4n^2 + a^2} \left\{ \frac{2n}{a} \right\}, \quad (29)$$

находим

$$\sigma_{Hs} = \sigma_0 R \frac{\Omega^2}{4\pi^{3/2} T^{3/2} \varepsilon_0^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{3/2} e^{-\frac{n\Delta}{T}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \times$$



$$\times \left[ \frac{\cos\left(\frac{2\pi k}{\Omega} \frac{s_0}{2\pi m_1}\right)}{k^2 + (a_n/\pi)^2} - \frac{\pi k \sin\left(\frac{2\pi k}{\Omega} \frac{s_0}{2\pi m_1}\right)}{a_n(k^2 + (a_n/\pi)^2)} \right], \quad a_n = \frac{n\Omega}{2T}. \quad (30)$$

Суммы по  $k$ , входящие в (30), могут быть вычислены точно

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 + a^2} \begin{cases} \cos kx \\ k \sin kx \end{cases} = \begin{cases} (-1/a) \operatorname{ch}(ax) \operatorname{cosech}(\pi a) + 1/2a^2 \\ \operatorname{sh}(ax) \operatorname{cosech}(\pi a) \end{cases}, \quad |x| < \pi. \quad (31)$$

Вновь представляя  $s_0/2\pi m_1 \Omega$  в виде  $N+r$  и воспользовавшись соотношениями (31), для проводимости  $\sigma_{Hs}$  получим

$$\sigma_{Hs} = \frac{\sigma_0 R}{2} \left( \frac{\pi T}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-n\Delta/T}}{\sqrt{n}} \left[ 1 - \frac{\Omega n}{2T} \frac{\exp(n\Omega/T)r}{\operatorname{sh}(\Omega n/2T)} \right]. \quad (32)$$

Вдали от перехода (при  $\Delta \gg T$ ) в этой сумме благодаря экспоненциальной зависимости слагаемых от  $n\Delta/T$  достаточно ограничиться первым членом

$$\sigma_{Hs} = \frac{\sigma_0 R}{2} \left( \frac{\pi T}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} e^{-\Delta/T} \left[ 1 - \frac{\Omega}{2T} \frac{e^{(\Omega/T)r}}{\operatorname{sh}(\Omega/2T)} \right]. \quad (33)$$

В случае слабых полей  $\Omega \ll T$  это выражение упрощается

$$\sigma_{Hs} \sim \sigma_0 R (T/\varepsilon_0)^{1/2} (\Omega/T) r \exp(-\Delta/T). \quad (34)$$

В случае более сильных полей ( $\Omega \gg T$ , но  $\Delta \gg \Omega$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{Hs} &\sim \sigma_0 R (T/\varepsilon_0)^{1/2} e^{-\Delta/T} \times \\ &\times \begin{cases} 1 - \frac{\Omega}{T} e^{-\Omega/T} \left( \frac{1}{2} - r \right), & \left| r - \frac{1}{2} \right| \geq T/\Omega, \quad \Omega \neq \Omega_{N+1/2}, \\ \Omega/T, & \left| r - 1/2 \right| < T/\Omega, \quad \Omega = \Omega_{N+1/2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что при  $\Delta \gg T$  величина  $\sigma_{Hs}$  экспоненциально мала по сравнению с  $\sigma_H$ , которой и определяются осцилляции проводимости в этой области. На рис. 4 представлены результаты численного расчета  $\sigma_{Hs}$  в промежуточном случае.

$\Delta \ll T$  (непосредственная окрестность ЭТП). В этой области выражение для проводимости (17) можно разложить в ряд по малому параметру  $\Delta/T$ . Для простоты остановимся на изучении зависимости  $\sigma_{Hs}(\Omega, \Delta=0)$ . Подставляя в выражение (32)  $\Delta=0$ , получим

$$\sigma_{Hs} = \frac{\sigma_0 R}{2} \left( \frac{\pi T}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ n^{-1/2} - \frac{\Omega \sqrt{n}}{2T} \frac{e^{(\Omega n/T)r}}{\operatorname{sh}(\Omega n/2T)} \right]. \quad (36)$$

В случае слабых полей ( $\Omega \ll T$ ) сумма в (36) благодаря гиперболическому синусу в знаменателе набирается на  $n \sim T/\Omega \gg 1$ . Ограничивая сумму слагаемыми с  $n \leq n_0 \sim T/\Omega$  и разлагая  $\exp((\Omega n/T)r)$  и  $\operatorname{sh}(\Omega n/2T)$ , находим

$$\sigma_{Hs} = \frac{\sigma_0 R}{2} \left( \frac{\pi T}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{n_0} (-1)^n \Omega r \sqrt{n} \sim \sigma_0 R (\Omega/\varepsilon_0)^{1/2} r. \quad (37)$$

В случае сильных полей ( $\Omega \gg T$ ) вдали от особых точек  $\Omega_{N+1/2}$  ( $|1/2 - r| \gg T/\Omega$ ) в сумму (36) основной вклад вносит первый член в квадратных скобках

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1/2} = (\sqrt{2} - 1) \zeta(1/2) \approx -0.205, \quad (38)$$

и тогда  $\sigma_{Hs} \sim -\sigma_0 R (T/\varepsilon_0)^{1/2}$ . Если же значение магнитного поля оказывается в окрестности особой точки  $\Omega_{N+1/2}$  ( $|1/2 - r| < T/\Omega$ ), то, заменив

при  $n_1 \sim (2T/\Omega) (1/2 - r)$  гиперболический синус на соответствующую экспоненту и представив (36) в виде

$$\sigma_{H_s} = \frac{\sigma_0 R}{2} \left( \frac{\pi T}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \left\{ (\sqrt{2} - 1) \zeta \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{\Omega}{T} \sum_{n=1}^{n_1} (-1)^n n^{1/2} \left( 1 + \frac{\Omega n}{T} \left( \frac{1}{2} - r \right) \right) \right\}, \quad (39)$$

окончательно получим

$$\sigma_{H_s} \sim -\sigma_0 R (\Omega/\varepsilon_0)^{1/2} (1 - 2r)^{-1/2} \sim -\sigma_0 R (T/\varepsilon_0)^{1/2} (\Omega/T). \quad (40)$$

Мы видим, что на фоне постоянной  $\sigma_{H_s}$  при  $\Omega \neq \Omega_{N+1/2}$  в точках  $\Omega = \Omega_{N+1/2}$  имеют место большие и узкие ( $\Delta\Omega \sim \Omega T/\varepsilon_0$ ) «скважины».

### 3. Обсуждение результатов

Анализ полученных результатов начнем с обсуждения поведения проводимости в окрестности ЭТП в достаточно сильном продольном магнитном поле ( $\Omega \geq 2\pi^2 T$ ). Вдали от перехода со стороны однополостного гиперболоида ( $\Delta \gg T$ ) связанные с ним поправки  $\sigma_{H_s}$  оказываются экспоненциально малыми (35) и вся магнитозависящая часть проводимости определяется величиной  $\sigma_H$  (16), о которой уже шла речь выше. Отметим, однако, что характер осцилляций проводимости таков, что значения  $\sigma_H$  не выходят за пределы полосы  $\pm \sigma_0 R (\Omega/\varepsilon_0)^{1/2}$  нигде, кроме как в окрестности особых точек  $\Omega = \Omega_{N+1/2}$ , в которых они достигают величины  $\sim (T/\varepsilon_0)^{1/2} (\Omega/T)$ . Разумеется, эти особые точки соответствуют тем полям, когда очередной уровень Ландау проходит через уровень Ферми.

Вблизи перехода амплитуда осцилляций  $\sigma_{H_s}$  уже становится одного порядка с  $\sigma_H$  и магнитозависящая часть проводимости  $\sigma_{H_s}(\Omega) + \sigma_H(\Omega)$  является суммой осцилляций этих двух типов. Интересно, что в особых точках  $\sigma_{H_s}$  и  $\sigma_H$  имеют одинаковый порядок  $\sim (T/\varepsilon_0)^{1/2} (\Omega/T)$ ; при остальных же значениях полей  $\sigma_H$  превышает  $\sigma_{H_s}$  по параметру  $(\Omega/T)^{1/2}$ . Составляющая проводимости  $\sigma_s$ , обусловленная лишь ЭТП в отсутствие магнитного поля, по порядку величины ( $\sigma_s \sim \sigma_0 (T/\varepsilon_0)^{1/2}$ ) оказывается меньше, чем  $\sigma_H + \sigma_{H_s}$ , поэтому экспериментальное наблюдение зависимости  $\sigma$  от  $H$  с этой стороны перехода ( $\Delta > 0$ ) не должно встретить серьезных трудностей. Иначе обстоит дело в области  $\Delta \ll -T$ , где вклад  $\sigma_{H_s}$  в большей степени компенсирует  $\sigma_H$ . И хотя такая компенсация, возможно, связана с искусственностью принятого нами деления магнитозависящей части времени электронной релаксации на  $\tau_2$  и  $\tau_3$ , амплитуда осцилляций проводимости  $\sigma_H + \sigma_{H_s}$  по параметру  $(T/|\Delta|)^{1/2}$  оказывается меньшей, чем по другую сторону перехода. Более того, эти осцилляции оказываются меньше, чем составляющая  $\sigma_s$ , по параметру  $\Omega/|\Delta|$  до тех пор, пока  $\Omega \leq |\Delta|$ . В области же очень сильных магнитных полей ( $\Omega \gg |\Delta|$ )  $\sigma_{H_s}$  и  $\sigma_s$  сравниваются по величине, однако тут уже  $\sigma_H$  не компенсирует  $\sigma_{H_s}$ , превосходя ее по прежнему параметру  $(|\Delta|/T)^{1/2}$ .

Для экспериментального наблюдения описанных здесь осцилляций в окрестности ЭТП основным требованием являются достаточно высокая однородность магнитного поля  $\Delta H/H_N \ll H_N/\varepsilon_F$  на образце и большая длина ( $T\tau \gg 1$ ) свободного пробега электрона проводимости. Если же требуемая однородность по полю в эксперименте не достигается, наблюдаемая величина проводимости будет вести себя подобно огибающей осцилляционных пиков, т. е. слева от перехода ( $\Delta < -T$ ) зависимость от  $\Omega$  должна быть существенно слабее (по параметру  $(T/|\Delta|)^{1/2}$ ), чем справа ( $\Delta > T$ ), и одно крыло характерного излома проводимости вблизи ЭТП будет гораздо сильнее зависеть от магнитного поля, чем другое.

В случае слабых полей осциллирующие добавки экспоненциально убывают по величине. При этом нужно помнить, что мы предполагали случаи рассеяния электронов на примесях достаточно редкими ( $\Omega\tau \gg 1$ ).

а следовательно,  $r_l \ll l = v_l \tau$ . В полях же  $H \ll mc/e\tau$  это условие нарушается, и для столь слабых полей предложенная теория несправедлива.

Авторы благодарят А. А. Абрикосова за постоянный интерес к работе и ценные замечания и А. А. Варламова за помощь и полезные обсуждения на протяжении всей работы.

### Список литературы

- [1] Лифшиц И. М. // ЖЭТФ. 1960. Т. 33. № 5. С. 1569—1576.
- [2] Егоров В. С., Федоров А. Н. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. № 5. С. 1647—1657.
- [3] Варюхин С. В., Егоров В. С. // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 29. № 1. С. 510—513.
- [4] Брандт Н. Б., Егоров В. С., Лавренюк М. Ю., Минина Н. Я., Савин А. М. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 4. С. 1157—1169.
- [5] Великодный А. Н., Заварицкий Н. В., Игнатьева Т. А., Юргенс А. А. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. № 12. С. 597—599.
- [6] Вакс В. Г., Трефилов А. В., Фомичев С. В. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. № 4. С. 1613—1621.
- [7] Варламов А. А., Панцулая А. В. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 6. С. 2188—2196.
- [8] Abrikosov A. A., Varlamov A. A., Pantsulaya A. V. // Preprint N 656. Inst. Theoret. Phys. Univ. Wroclaw, 1986. P. 37—49.
- [9] Walington C. L., Cook J. W., Skove M. I. // Phys. Rev. B. 1977. V. 15. N 3. P. 1370—1377.
- [10] Overcash D. R., Tracy Davis, Cook J. W., Skove M. I. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 66. N 4. P. 287—290.
- [11] Будько С. Л., Гапотченко А. Г., Ицкевич Е. С. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. № 2. С. 106—108.
- [12] Будько С. Л., Вороновский А. Н., Гапотченко А. Г., Ицкевич Е. С. // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. № 2. С. 778—783.
- [13] Blanter Ya. M., Pantsulaya A. V., Varlamov A. A. // Nuovo Cimento. 1989. V. 11D. N 12. P. 1819—1842.
- [14] Абрикосов А. А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. С. 152—179.
- [15] Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.
- [16] Абрикосов А. А. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. № 4. С. 1391—1406.

Московский институт стали и сплавов  
Институт физики АН ГССР  
Тбилиси

Поступило в Редакцию  
9 апреля 1990 г.