

Плазменные колебания в системе больших квантовых точек

© С.В. Ганцевич

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 29 апреля 2008 г.)

Теоретически исследуются плазменные колебания в системе квантовых точек, содержащих много электронов, которые можно рассматривать квазиклассически как электронный газ.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-02-16384-а.

PACS: 71.10.Ca, 72.10.-d, 73.63.-b

Физика плазменных колебаний в электронной системе весьма проста: при отклонениях от равновесного положения частиц (равновесной концентрации) возникают кулоновские силы, стремящиеся восстановить равновесие. После того, как равновесное положение пройдено, частицы продолжают движение по инерции, при этом знак изменения концентрации меняется, и снова возникают возвращающие кулоновские силы. При малых отклонениях от равновесия и малой величине потерь колебания оказываются гармоническими с частотой, зависящей от равновесной концентрации, которая и определяет упругость электронной системы. Сила упругости в расчете на один электрон равна

$$\delta f = \frac{e^2}{r^2} - \frac{e^2}{(r + \delta r/2)^2} \approx \frac{e^2}{r^3} \delta r \equiv k_e \delta r. \quad (1)$$

Отсюда для гармонического колебания следует оценка плазменной частоты

$$\omega_{pl}^2 = \frac{k_e}{m} \approx \frac{e^2}{mr^3} \approx \frac{e^2 n}{m}. \quad (2)$$

В этих формулах e — заряд электрона, m — его масса, $r \equiv r_e$ — среднее расстояние между электронами. Для того чтобы плазменные колебания были бы хорошо выражены, период их колебаний должен быть меньше других характерных времен в электронной системе. При недиссипативных движениях (например, при движении электронов в атомах и молекулах) плазменные колебания накладываются на них и не могут быть выделены при сравнимых масштабах времен, а при сильной диссипации отсутствует нужная инерциальность движения. Изменить плазменную частоту с тем, чтобы сделать колебания наблюдаемыми, можно, как видно из оценки (2), подходящим выбором размера системы. Современная техника выращивания материалов позволяет создавать изолированные электронные системы — так называемые квантовые точки [1–5], напоминающие по многим своим свойствам атомы и молекулы с очень большим числом электронов. В таких системах частоты плазменных колебаний не столь велики как в многоэлектронных атомах и молекулах, где они по этой причине малоинтересны. С другой стороны, при размерах таких систем, меньших длин свободного пробега электронов,

оказываются ослабленными процессы релаксации. При межэлектронных расстояниях r_e порядка боровского радиуса по оценке (2) плазменным частотам соответствуют частоты порядка и больше оптических частот. Плазменная частота падает с ростом этого расстояния как $r_e^{3/2}$, и при его увеличении в квантовой точке в 100 раз можно ожидать частот на три порядка меньше оптических. Таким частотам соответствуют важные для технических приложений электромагнитные волны миллиметрового и субмиллиметрового диапазона. Для создания плазменного осциллятора достаточно только небольшой области с бесстолкновительной проводимостью, например, это может быть проводящая капля на изолированной подложке. Такие осцилляторы и их системы могут быть интересны для прикладных целей.

В настоящее время имеется много работ по учету кулоновского взаимодействия электронов в квантовых точках и системах квантовых точек. В них, как правило, рассматриваются точки с небольшим числом электронов с квантованными уровнями, т.е. системы, достаточно близкие по своим свойствам многоэлектронным атомам и молекулам (см., например, [6–10]). В таких системах плазменные колебания — эффект сугубо классический, который маскируется различными квантовыми эффектами. Мы рассмотрим другую и более простую задачу — плазменные колебания в больших квантовых точках, которые можно считать областями, заполненными электронным газом без существенного влияния границ на его поведение. В этом случае плазменные колебания будут почти такими же, как в однородной среде, что позволяет применить традиционные методы обычной кинетики. Система таких точек (в дальнейшем будем называть их электронными каплями) окажется подобной системе слабосвязанных гармонических осцилляторов [11–12].

В электронном газе действующий гармонический потенциал $\varphi \sim e^{-i\omega t + iqr}$ получается из внесенного потенциала делением на диэлектрическую постоянную

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - iq \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_p \frac{1}{-i\omega + iqv + I_p} \frac{\partial F}{\partial p}. \quad (3)$$

Здесь $F(p)$ — стационарная (равновесная) функция распределения по импульсу, I_p — оператор столкновений.

(Для простоты мы не используем векторных обозначений импульсов и волновых векторов и принимаем диэлектрическую постоянную среды и объем равными единице).

Условие $\epsilon = 0$ есть условие возникновения плазменных колебаний. Для вывода выражения для плазменной частоты из этого условия нужно несколько преобразовать (3) с тем, чтобы ясно учесть механизм образования пространственного заряда в газе электронов под действием возмущения. Оно создает в точке своего действия и в момент действия не заряды, а токи. Пространственный заряд (т.е. неоднородность концентрации электронов в пространстве) возникает потом из-за этих локальных токов и связан с ними уравнением непрерывности.

Учитывая свойство оператора I_p , выражающее закон сохранения числа частиц при столкновениях,

$$\sum_p I_p x(p) \equiv \sum_{pp'} [W_{p'p} x(p) - W_{pp'} x(p')] = 0 \quad (4)$$

(где $W_{pp'}$ — вероятность перехода между состояниями, а $x(p)$ — произвольная функция от импульса), перепишем сумму в формуле (3) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{-i\omega} \sum_p [(-i\omega + iqv + I_p) - iqv] \frac{1}{-i\omega + iqv + I_p} \frac{\partial F}{\partial p} \\ &= \frac{q}{\omega} \sum_p v \frac{1}{-i\omega + iqv + I_p} \frac{\partial F}{\partial p}. \end{aligned} \quad (5)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках сокращается со знаменателем и обращается в нуль как сумма от градиента функции распределения по импульсу. В итоге справа в (5) появилась (с точностью до множителя) Фурье-компонента проводимости на переменном токе

$$\sigma(q, \omega) = e^2 \sum_p v \frac{1}{-i\omega + iqv + I_p} \frac{\partial F}{\partial p}, \quad (6)$$

через которую теперь выражается диэлектрическая постоянная $\epsilon(q, \omega)$:

$$\epsilon(q, \omega) = 1 + iq \frac{4\pi}{q^2} \frac{q}{\omega} \sigma(q, \omega) = 1 + \frac{4\pi\sigma(q, \omega)}{-i\omega}.$$

Теперь уже можно оставить в выражении для резольвенты уравнения Больцмана в формуле (6) только $-i\omega$ и из условия $\epsilon(q, \omega) = 0$ получить формулу для плазменной частоты

$$\omega^2 = -4\pi e^2 \sum_p v \frac{\partial F}{\partial p} = 4\pi e^2 \sum_p F(p) \frac{1}{m} = \frac{4\pi e^2 n}{m}, \quad (8)$$

здесь $n = N/V$ — концентрация частиц в образце.

При выводе формулы (8) мы пренебрегли релаксацией $\omega \gg I_p$ и дисперсией, возникающей из-за собственного движения частиц плазмы $\omega \gg qv$. (При учете его в

первом исчезающем приближении в правой части (8) появился бы множитель $1 + q^2 R_D^2$, где радиус экранирования $R_D \sim v/\omega$ — путь, проходимый частицей за период плазменного колебания). Мы пренебрегли экранированием, и никаких плазменных волн у нас не получилось, а возникли однородные в пространстве колебания всей электронной системы относительно ионного положительно заряженного остова, обеспечивающего предполагаемую общую нейтральность системы.

При таких колебаниях заряды появляются только на границах образца. Если внутри образца мысленно выделить некоторый объем в виде параллелепипеда с гранями, параллельными направлению поля в образце, и проследить за его поляризацией, то можно легко заметить, что причиной его однородной поляризации является отсутствие расхождения электрических силовых линий зарядов, возникающих на гранях такого виртуального объема. Поле его заряженных поверхностей служит упругой возвращающей силой для колебаний электронов внутри объема. Именно из-за отсутствия рассеяния силовых линий внутри образца в трехмерном случае эта сила не зависит от длины виртуального объема, и все подобные виртуальные диполи колеблются с одинаковой частотой. В двумерном и одномерном случаях такой выделенный виртуальный диполь остается электрически трехмерным, при этом силовые линии электрического поля выходят из плоскости или линии и, следовательно, не полностью вносят вклад в возвращающую силу соответствующего осциллятора. Поэтому появляется зависимость частоты колебаний от длины диполя и соответственно от волнового вектора. Аналогичный эффект должен иметь место и для трехмерных образцов конечных размеров, поскольку поля зарядов на границах должны также частично рассеиваться в пространстве вне образца. Из-за этого рассеяния упругость электронного газа уменьшается, а сама частота плазменных колебаний конечного образца начинает зависеть от его размеров и формы. Сам такой образец электрически эквивалентен диполю, эффективная длина которого определяется размерами и формой образца. Сравним диполь в ионной решетке и диполь с электронным газом. Диполь в решетке можно представить в виде пары разноименных зарядов, связанных квазиупругой силой. Заряды на концах диполя постоянны, а длина его периодически меняется. При дипольных плазменных колебаниях нашего образца, наоборот, длина диполя остается постоянной, но периодически изменяются по величине и знаку заряды на его концах. Поскольку дипольный момент есть произведение заряда диполя на его плечо, оба осциллятора при равных дипольных моментах создают в пространстве одинаковый потенциал и в этом отношении равноценны. В прямоугольном образце длины l и сечения S с плотностью электронов $n = N/S l$ при однородном смещении электронов на величину dx на концах образца возникает заряд $dQ = enS dx$, и образец можно уподобить диполю с моментом $d = l dQ$. Его можно пересчитать как $d = lenS dx = eN dx = Q dx$

и понимать как дипольный момент полного заряда образца, смещенного на величину dx . Итак, наш образец с плазменными колебаниями можно аппроксимировать колеблющимся диполем. (Дипольное приближение также применяется и при учете квантования [6–10]). Детали физического механизма колебаний внутри образца и потенциала на границе будут сказываться на параметрах аппроксимирующего диполя, но вся картина колебаний в системе квантовых точек-диполей от этих деталей не будет зависеть.

Для системы таких диполей-капель с электронным газом следует перейти к координатно-временному представлению и рассмотреть в нем процесс поляризации. Пусть $F_j(p)$ — стационарная (равновесная) функция распределения в выделенной капле j , а $f_j(p, r, t)$ — переменная добавка к ней, возникающая из-за действия на электроны переменного поля. Это поле складывается из внешнего (затравочного) поля и индуцированного им поля от перераспределения зарядов в данной капле и во всех остальных каплях. Поле зарядов внутри выделенной капли определяет исходную частоту колебания в данной капле, а поля остальных капель дают поправки к ней. (Для простоты мы далее не будем учитывать влияние границ на функцию распределения электронов). Функция $f_j(p, r, t)$ удовлетворяет уравнению Больцмана

$$\begin{aligned} B_j f_j &\equiv (\partial_t + v\nabla + I_p) f_j(p, r, t) \\ &= -eE(r, t) \partial_p E_j(p) = \partial_p F_j(p) e \nabla \varphi(r, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Стационарную функцию распределения F_j в правой части этого выражения мы считаем не зависящей от координат в пределах данной капли. Имея это в виду, найдем распределение заряда в капле j из решения уравнения отклика (9)

$$\begin{aligned} \rho_j &= en_j(r, t) \\ &= \left[e^2 \sum_p B_j^{-1} \partial_p F_j \nabla \right] \varphi(r, t) \equiv \prod_j \varphi(r_j, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Поляризационный оператор капли \prod_j действует на полный потенциал $\varphi(r, t)$ только в пределах своей капли, поэтому справа в (10) мы положили $r = r_j$.

Полный потенциал $\varphi(r, t)$ естественно разбивать на сумму парциальных потенциалов $\varphi_j(r, t)$, источником которых служат заряды соответствующих капель,

$$\varphi(r, t) = -\frac{4\pi}{\Delta} \sum_j \rho_j(r, t) \equiv \sum_j \varphi_j(r, t). \quad (11)$$

Отметим различное поведение (парциальной) плотности заряда ρ_j и парциального потенциала φ_j как функций от пространственных координат. Потенциал φ_j отличен от нуля во всем пространстве, тогда как плотность заряда ρ_j равна нулю вне своей капли.

Мы предполагаем, что расстояния между каплями достаточно велики, и взаимодействие зарядов внутри капли гораздо сильнее взаимодействия зарядов разных капель. Таким образом, при $j \neq j'$ следует ожидать, что $\varphi_j(r_j) \gg \varphi_j(r_{j'}) \sim \varphi_{j'}(r_j)$.

Разделяя взаимодействие внутри капли и взаимодействие капель, получим

$$\rho_j(r_j, t) = \prod_j \varphi_j(r_j, t) + \sum_{j' \neq j} \prod_j \varphi_{j'}(r_j, t), \quad (12)$$

$$\varphi_j(r, t) = -\frac{4\pi}{\Delta} \rho_j(r, t) \equiv \int d^3 r_j \frac{\rho_j(r_j, t)}{|r - r_j|}. \quad (13)$$

Итак, для зарядов капель и парциальных потенциалов получается система линейных интегродифференциальных уравнений, решение которой и описывает плазменные колебания в нашей системе капель с электронным газом.

Прделаем в формуле для поляризационного оператора данной капли процедуру, аналогичную (5)–(7), но в операторно-координатной форме. Мы имеем

$$\begin{aligned} \prod_j &= -\frac{e^2}{\partial_t} \sum_p [B_j - v\nabla] B_j^{-1} \partial_p F_j \nabla \\ &= \frac{e^2}{\partial_t} \sum_p v \nabla B_j^{-1} \partial_p F_j \nabla. \end{aligned} \quad (14)$$

Оператор поляризации в виде (14) представляет собой алгоритм решения уравнения непрерывности с учетом закона Ома

$$\partial_t n(r, t) + \text{div} \mathbf{j}(r, t) = 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t). \quad (16)$$

В правой части формулы (14) следует сделать те же пренебрежения, что и ранее при выводе формулы для плазменной частоты в обычном электронном газе. В итоге получим высокочастотное приближение для поляризационного оператора в капле j :

$$\begin{aligned} \prod_j &= \frac{e^2}{\partial_t} \sum_p v \nabla \frac{1}{\partial_t + v\nabla + I_p} \partial_p F_j \nabla \\ &\cong -\frac{\Delta}{\partial_t^2} \frac{e^2}{m} n_j. \end{aligned} \quad (17)$$

Взаимодействие между каплями осуществляется перекрестными значениями парциальных потенциалов $\varphi_{j'}(r_j)$, величины которых можно оценить с помощью интеграла Пуассона (13),

$$\varphi_{j'}(r_j) = \int d^3 r' \frac{\rho_{j'}(r')}{|r_j + R_j - R_{j'} - r'|}. \quad (18)$$

Здесь векторы r_j и r' лежат внутри капель, а векторы R_j и $R_{j'}$ соответствуют центрам капель. Поскольку

с учетом положительного фона полный заряд капли размером порядка l равен нулю, перекрестный потенциал $\varphi_{j'}(r_j)$ при расстоянии между каплями порядка R меньше собственного потенциала капли $\varphi_j(r_j)$, по крайней мере как $(l/R)^2$. Из (18) также видно, что для пары одинаковых капель $\varphi_j(r'_j) = \varphi_{j'}(r_j)$.

Пренебрегая взаимодействием между каплями, получим для потенциала внутри капли уравнение обычного осциллятора

$$\varphi_j(r, t) = -\frac{4\pi e^2 n_j}{m\partial_t^2} \frac{\Delta}{\Delta} \varphi_j(r, t) = -\frac{\omega_j^2}{\partial_t^2} \varphi(r, t), \quad (19)$$

$$(\partial_t^2 + \omega_j^2)\varphi_j(r, t) = 0. \quad (20)$$

Такое же уравнение получается для плотности заряда

$$(\partial_t^2 + \omega_j^2)\rho_j(r_j, t) = 0. \quad (21)$$

Дипольный момент капли

$$\mathbf{d}_j(t) = \int d\mathbf{r}_j \rho_j(\mathbf{r}_j, t) \mathbf{r}_j \quad (22)$$

удовлетворяет, очевидно, такому же уравнению, и может быть записан в виде

$$\mathbf{d}_j(t) = \mathbf{d}_j(0)e^{-i\omega_j t}. \quad (23)$$

Найдем теперь в дипольном приближении перекрестный потенциал $\varphi_j(r_{j'})$. Из (18) получаем

$$\varphi_j(\mathbf{R}) = \frac{d_j \mathbf{R}}{R^3}. \quad (24)$$

Поскольку диполи-капли малы по сравнению с расстояниями между ними, на каплю-диполь j со стороны другой капли-диполя j' , удаленной от нее на расстояние $R = |\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_{j'}|$, действует однородное в пространстве и переменное во времени электрическое поле

$$\mathbf{E}_{j'}(\mathbf{R}) = \frac{3(\mathbf{d}_{j'} \mathbf{R})\mathbf{R} - \mathbf{d}_{j'} R^2}{R^5}. \quad (25)$$

Это поле, действуя на диполь, поворачивает и растягивает его, осуществляя тем самым взаимодействие между каплями-осцилляторами. Так, в уравнении движения для диполя \mathbf{d}_j появляется возмущение от других диполей

$$(\partial_t^2 + \omega_j^2)d_j + \sum_{j' \neq j} \mathbf{w}_{jj'} d_{j'} = 0. \quad (26)$$

Тензор взаимодействия $\mathbf{w}_{jj'}$ мал, как $(l/R)^3$ по отношению к частоте ω_j^2 .

Кулоновские силы внутри капли определяют частоту колебаний полей и зарядов, а (диполь-дипольное) взаимодействие между каплями объединяет все капли в единую колебательную систему. Таким образом, при выбранных приближениях задача о коллективных колебаниях в такой системе становится подобной задаче о колебаниях в ионной решетке кристалла [12–14], но с тем

важным различием, что частоты колебаний отдельных капель при их объединении в систему меняются незначительно. Ввиду этого задачу можно решать итерациями, используя в качестве нулевого приближения независимые колебания в отдельных каплях. Если все частоты независимых колебаний различны, то результатом учета взаимодействия будет только небольшой сдвиг каждой из частот.

Иное положение возникает при вырождении, когда частоты колебаний в разных каплях совпадают. В этом случае уже в нулевом приближении из-за резонанса колебания отдельных капель оказываются сильно связанными. Между амплитудами колебаний (точнее между их фазами) устанавливаются определенные соотношения, и они складываются в „правильные моды“ нулевого приближения, которые становятся коллективными колебаниями всех (находящихся в резонансе) капель. Каждой такой моде соответствует свой небольшой сдвиг по частоте.

Приведем для иллюстрации случай двух взаимодействующих диполей одинаковой ориентации. Частоты при взаимодействии равны

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + w_{12}w_{21}}. \quad (27)$$

Новые частоты при отсутствии вырождения мало отличаются от старых

$$\Omega_{1,2}^2 \simeq \omega_{1,2}^2 \pm \frac{w_{12}w_{21}}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \quad (28)$$

и колебания остаются независимыми. При резонансе $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ образуются синфазное $d_1 + d_2$ и противофазное $d_1 - d_2$ колебания с частотами

$$\Omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \pm \sqrt{w_{12}w_{21}}. \quad (29)$$

Сдвиг квадратов частот пропорционален $\omega_0^2(l/R)^3$. Поскольку $\omega_0^2 \propto 1/l^3$, этот сдвиг оказывается плазменной частотой, соответствующей средней электронной плотности всей системы. Таким образом, коллективную моду можно рассматривать как результат модуляции высокочастотного колебания отдельной капли низкочастотным колебанием всей электронной системы. Характер коллективных мод будет таким же и в случае многих резонансных осцилляторов-капель.

Рассмотрим также в качестве простого примера случай полного вырождения в цепочке диполей-капель с одинаковыми константами взаимодействия между соседями. Поскольку взаимодействие быстро убывает с расстоянием между диполями, для определения характера коллективных мод будет достаточно приближения ближайших соседей.

В этом приближении получается очень простая и универсальная система линейных уравнений для связанных осцилляторов. В такой системе амплитуды колебаний u_j

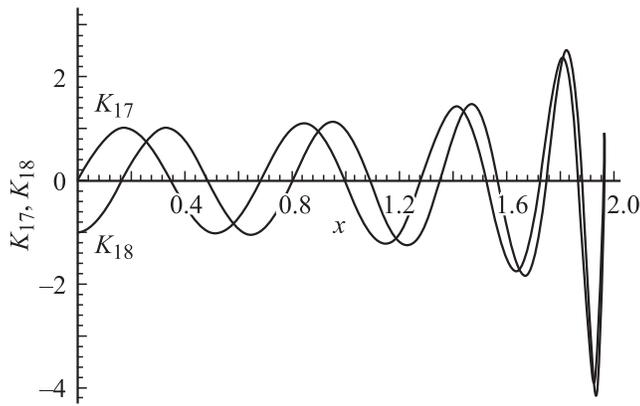


Рис. 1. Полиномы $K_{17}(x)$ и $K_{18}(x)$ для свободной цепочки. Корни лежат слева и справа от нуля, так что видна лишь их половина.

трех соседей внутри цепочки образуют равенство

$$u_{n-1} + xu_n + u_{n+1} = 0 \quad (30)$$

с добавлением двух уравнений $xu_1 + u_2 = 0$, $xu_{n-1} + u_n = 0$ для концов цепочки. Спектральная переменная $x = w/(\omega_0^2 - \omega^2)$ есть безразмерное отношение константы взаимодействия и сдвига частот.

Детерминант этой системы $K_n(x)$ — „спектральный полином“ степени n . Его можно найти с помощью рекуррентного соотношения

$$K_{n+1}(x) = xK_n(x) - K_{n-1}(x), \quad (31)$$

начиная с $K_0 = 1$ и $K_1 = x$. Допустимые значения частот будут определяться корнями спектрального полинома. Если подставлять корень полинома $K_n(x) = 0$ во все полиномы $K_m(x)$ меньшей степени, то по формуле

$$u_{m+1} = (-)^m K_m(x) u_1 \quad (32)$$

можно найти относительные амплитуды колебаний отдельных осцилляторов, составляющих моду с данной частотой. Рецепт последовательного построения спектральных полиномов несложен и практически сводится к сложению абсолютных значений коэффициентов двух смежных полиномов „наискось“ с последующей расстановкой знаков. Приведем в качестве примера выражения для K_{17} и K_{18} :

$$\begin{aligned} K_{17} &= x^{17} - 16x^{15} + 105x^{13} - 364x^{11} + 715x^9 \\ &\quad - 792x^7 + 462x^5 - 120x^3 + 9x, \\ K_{18} &= x^{18} - 17x^{16} + 120x^{14} - 455x^{12} + 1001x^{10} \\ &\quad - 1287x^8 + 924x^6 - 330x^4 + 45x^2 - 1. \end{aligned}$$

На рис. 1 представлены графики этих полиномов при $0 < x < 2$, где лежат их корни. Вне спектрального отрезка $-2 < x < 2$ значения полиномов резко растут по

абсолютной величине. Спектральные полиномы имеют целочисленные коэффициенты и обладают рядом интересных свойств.

При расчете спектров твердого тела пользуются весьма удобными циклическими граничными условиями. Хотя такой выбор превращает параллелепипед и прямоугольник соответственно в поверхности четырехмерного и трехмерного эллипсоидов, а линию — в кольцо, принято считать, что при достаточно большом размере системы (большом радиусе кривизны получившегося объекта) это не сказывается на физических результатах. В частности, коллективные моды в достаточно длинной цепочке осцилляторов близки к модам в цепочке с циклическими условиями с таким же n .

Мы можем это проверить для нашего случая. Уравнения для амплитуд осцилляторов в случае циклической цепочки отличаются от уравнений свободной цепочки только первым и последним уравнениями $xu_1 + u_2 + u_n = 0$ и $u_1 + u_{n-1} + xu_n = 0$, что приводит к появлению в детерминанте для допустимых значений x единиц в верхнем правом и нижнем левом углу. Этот детерминант $C_n(x)$ по своим свойствам похож на детерминант $K_n(x)$, но не тождествен ему. Полином C_n можно выразить через полиномы K_n таким образом:

$$C_{n+1}(x) = K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) + (-)^n 2. \quad (33)$$

Для полиномов C_n также имеет место рекуррентная формула

$$C_{n+1}(x) = xC_n(x) - C_{n-1} + (-)^n (2x + 4). \quad (34)$$

Циклические условия имеют смысл для $n \geq 3$. Формально определив $C_2 = x^2 - 4$, рекуррентной формулой можно пользоваться, начиная с $n = 3$. Впрочем, она менее удобна, чем аналогичная формула для полиномов K_n , из-за нарушения правила чередования знаков для первой и

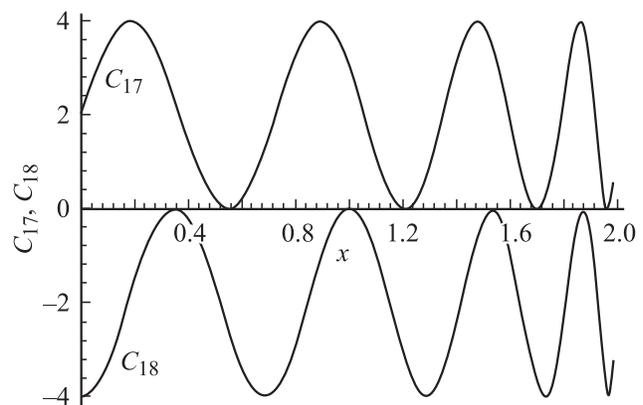


Рис. 2. Полиномы $C_{17}(x)$ и $C_{18}(x)$ для $x > 0$. Корни — точки касания оси абсцисс. Вырождение связано с симметрией циклической цепочки. Другая половина корней расположена слева от оси ординат.

нулевой степени x . Приведем примеры полиномов C_n и графики для них (рис. 2):

$$C_{17} = x^{17} - 17x^{15} + 119x^{13} - 442x^{11} + 935x^9 - 1122x^7 + 714x^5 - 204x^3 + 17x + 2,$$

$$C_{18} = x^{18} - 18x^{16} + 135x^{14} - 546x^{12} + 1287x^{10} - 1782x^8 + 1386x^6 - 540x^4 + 81x^2 - 4.$$

Полиномы K_n и C_n очень похожи, но имеют разные корни, причем корни полинома C_n всегда двукратно вырождены (дополнительно к вырождению по симметрии $x \rightarrow -x$). Следует подчеркнуть, что несовпадение корней будет всегда при любом n , т.е. частоты коллективных мод циклической цепочки никогда не совпадают с частотами обычной цепочки. При увеличении числа мод интервал между соседними частотами в обоих случаях стремится к нулю, поэтому совпадение свойств цепочек можно рассматривать только в этом смысле.

Найдем теперь явные выражения корней спектральных полиномов $K_n(x)$ и $C_n(x)$. Легко заметить, что все уравнения системы (30) кроме первого и последнего можно удовлетворить подстановкой $u_m = a^m u_0$. При этом по сокращении множителя a^m получится простое соотношение $1/a + x + a = 0$, из чего следует $x = -(1/a + a)$ с любым a . Специальным выбором множителя можно удовлетворить и двум оставшимся уравнениям, учтя тем самым граничные условия для цепочек, которые и определяют значения допустимых частот в каждом конкретном случае. Для циклической цепочки должно быть $a^n = 1$, и $a = \exp(i2\pi k/n)$. Спектр при этом

$$x_k = -2 \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right). \quad (35)$$

Это и есть корни полинома $C_n(x)$, который теперь можно представить в виде произведения

$$C_n(x) = \prod_{k=1}^n \left[x + 2 \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right) \right]. \quad (36)$$

Коэффициенты полинома $C_n(x)$ и его корни связаны определенными соотношениями. Например, приравнявая свободный член полинома в этих формулах, получим

$$2^n \prod_{k=1}^n \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right) = 2. \quad (37)$$

Для свободной цепочки подбор решения несколько сложнее, поскольку уравнения для крайних диполей имеют только два слагаемых, тогда как алгоритм подстановки требует трех слагаемых. Эту трудность можно преодолеть, если дополнить эти две пары третьим слагаемым, равным нулю. Сам множитель $a = \exp(i\phi)$ и его степени всегда отличны от нуля, но их мнимые части $\sin(m\phi)$ могут обращаться в нуль и удовлетворять

граничным условиям $u_0 = 0$ и $u_{n+1} = 0$. Первое условие с $m = 0$ удовлетворяется автоматически, а второе, $\sin[(n+1)\phi] = 0$, дает спектр частот цепочки из n диполей — корни полинома K_n :

$$x_k = -2 \cos\left(\pi \frac{k}{n+1}\right), \quad (38)$$

$$K_n(x) = \prod_{k=1}^n \left[x + 2 \cos\left(\pi \frac{k}{n+1}\right) \right]. \quad (39)$$

Коэффициенты и корни полинома K_n также связаны определенными соотношениями. Например, аналогично (38) получим

$$2^{2n} \prod_{k=1}^{2n} \cos\left(\pi \frac{k}{2n+1}\right) = 2. \quad (40)$$

Расчет спектра коллективных мод был сделан в приближении ближайших соседей. Поправки к этому спектру невелики и не меняют характера коллективных мод. Этот характер легко установить, даже не прибегая к расчету, а просто укладывая по длине цепочки целое число волн для циклических граничных условий и целое число полувольт для нулевых граничных условий. То, что колебания сосредоточены в отдельных дискретных каплях, на правильности этого алгоритма не отражается. Его можно применять и в других случаях для более сложных систем квантовых точек.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В.Л. Гуревичу за привлечение внимания автора к данной проблеме и за обсуждение результатов. Автор также выражает благодарность М.И. Мурадову за помощь в работе и обсуждение ряда вопросов взаимодействия колебаний.

Список литературы

- [1] C.W.J. Beenakker. Phys. Rev. B **44**, 1646 (1991).
- [2] U. Meirav, E.B. Foxman. Semicond. Sci. Tech. **10**, 255 (1995).
- [3] R. Kotlyar, C.A. Stafford, S. Das Sarma. Phys. Rev. B **58**, 3989 (1999).
- [4] P. Riege, T. Kurth, F. Runkel, D. Heitmann, K. Eberl. Appl. Phys. Lett. **70**, 111 (1997).
- [5] T. Kang et al. Phys. Rev. B **76**, 075 345 (2007).
- [6] D. Huang, P.R. Antoniewicz. Phys. Rev. B **43**, 2169 (1991).
- [7] W. Que. Phys. Rev. B **47**, 1636 (1993).
- [8] W. Que. Phys. Rev. B **43**, 7127 (1991).
- [9] W. Que, G. Kirzenow, E. Castano. Phys. Rev. B **43**, 14 079 (1991).
- [10] S.A. Mikhailov. Phys. Rev. B **54**, 10 335 (1996).
- [11] A.L. Fetter, J.D. Walecka. Theoretical mechanics of particles and continua. McGraw-Hill, N.Y. (1980). 412 p.
- [12] М. Борн, Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. ИЛ, М. (1958). 488 с.
- [13] О. Маделунг. Теория твердого тела. Наука, М. (1980). 416 с.
- [14] А.И. Ансельм. Введение в теорию полупроводников. ФМ, М. (1962). 418 с.