УДК 538.945

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ УПРУГИХ СВОЙСТВ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ В МОДЕЛИ С СИЛЬНО АНИЗОТРОПНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ СПЕКТРОМ

Н. В. Щедрина, М. И. Щедрин

Рассматривается температурное поведение модуля упругости сверхпроводника в модели БКШ с сильно анизотропным электронным спектром, имеющим особенность в плотности состояний на поверхности Ферми. Найден минимум при температуре $T_м$, меньшей температуры сверхпроводящего перехода T_c, $T_м \approx 0.9\ T_c$. При этом относительное уменьшение скорости звука составляет около 12 %.

Последние экспериментальные данные [1-4] указывают на определенное отличие поведения упругих свойств высокотемпературных сверхпроводников (ВТС) по сравнению с традиционными, а именно пик поглощения и минимум скорости ультразвука имеют место в сверхпроводящей фазе вблизи температуры сверхпроводящего перехода T_c. Подобные особенности отмечались ранее в системах с тяжелыми фермионами [6, 7]. Причины такого поведения остаются невыясненными до настоящего времени. Были попытки [8] объяснить эти факты наличием примесей. В данной работе показано, что особенности в температурной зависимости упругих свойств могут быть связаны с видом электронного спектра этих веществ. Вопрос о характере электронного спектра ВТС обсуждался во многих работах экспериментального, теоретического и обзорного характера [9-13]. Отметим, что хотя по этому вопросу до сих пор нет однозначного мнения по всем пунктам, однако многими признается наличие сильной анизотропии. Здесь исследуется случай предельно сильной анизотропии, когда интеграл перекрытия для носителей в направлении, перпендикулярном базисной плоскости мал, и их энергетический спектр имеет квазидвумерный характер. То же самое относится к величине энергетической щели, причем ширина щели Δ в базисной плоскости считается изотропной. Вопрос о применимости к ВТС представлений о квазидвумерном характере энергетического спектра носителей заряда обсуждался в обзорных работах [12, 13], численным расчетам такого спектра посвящены работы [9, 14]. Здесь мы рассматриваем двумерный энергетический спектр носителей следующего вида:

$$\xi(\mathbf{p}) = -B(\cos p_x a + \cos p_y a), \tag{1}$$

где $4B$ — ширина зоны проводимости, a — постоянная решетки в так называемой плоскости (a, b). Отметим, что такой вид спектра (1) использовался для обсуждения многих особенностей, наблюдаемых в ВТС [10, 15, 16].

В данной работе показано, что использование указанного электронного спектра (1) приводит к тем особенностям акустических свойств ВТС, о которых шла речь выше. Здесь ограничимся случаем температурной зависимости скорости ультразвука. Изменение скорости звука вычисляется во втором порядке теории возмущений по константам деформационного потенциала θ_{ij}. Поправка к эффективному модулю упругости в этом случае имеет вид

$$\Delta C_{ijkl}(\omega_n, \mathbf{q}) = \theta_{ij}\theta_{kl}T\sum_{\omega_\nu}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\{G(\omega_\nu, \mathbf{p})G(\omega_\nu+\omega_n, \mathbf{p}+\mathbf{q}) - F(\omega_\nu, \mathbf{p})F(\omega_\nu+\omega_n, \mathbf{p}+\mathbf{q})\}. \quad (2)$$

В нулевом приближении гриновские функции G и F известны [17] и равны

$$G(\omega_n, \mathbf{p}) = (i\omega_n + \xi(\mathbf{p}))/(\omega_n^2 + \xi^2(\mathbf{p}) + \Delta^2), \quad F(\omega_n, \mathbf{p}) = \Delta/(\omega_n^2 + \xi^2(\mathbf{p}) + \Delta^2), \quad (3)$$

$\xi(\mathbf{p})$ — затравочный энергетический спектр электронов, Δ — величина сверхпроводящей щели. Выполняя в (8) суммирование по ω_ν, получим

$$\Delta C_{ijkl}(\omega_n, \mathbf{q}) = \theta_{ij}\theta_{kl}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left\{(n_{\varepsilon_2} - n_{\varepsilon_1})\frac{\xi_1\xi_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - \Delta^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + \omega_n^2} - (n_{\varepsilon_2} + n_{\varepsilon_1} - 1)\frac{\xi_1\xi_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \Delta^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)^2 + \omega_n^2}\right\}, \quad (4)$$

$$\xi_1 \equiv \xi_1(\mathbf{p}), \quad \xi_2 \equiv \xi(\mathbf{p}+\mathbf{q}), \quad \varepsilon_{1,2} = \sqrt{\xi_{1,2}^2 + \Delta^2}.$$

Для случая длинноволнового ультразвука с $q \ll k_F$ выражение (4) можно упростить. Положим $\xi_1 \approx \xi_2$, $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$, а разность $n_{\varepsilon_2} - n_{\varepsilon_1}$ разложим в ряд по малой величине $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Кроме того, ограничимся случаем $\omega_n = 0$, т. е. не будем рассматривать частотную дисперсию модуля упругости C. Тогда вещественная часть (4) приводится к виду

$$\mathrm{Re}\,\Delta C_{ijkl} \equiv \overline{\Delta C_{ijkl}} = \theta_{ij}\theta_{kl}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left\{\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)^2\right\}. \quad (5)$$

В (5), как обычно, перейдем от интегрирования по $\mathbf{p}$ к интегрированию по энергии ξ. В дальнейших расчетах ограничимся случаем полузаполненной зоны. Тогда для спектра (1) линия Ферми представляет собой ромб на плоскости (p_x, p_y) с вершинами в точках $(\pm\pi/a, \pm\pi/a)$, и мы имеем дело с псевдоцилиндрической Ферми-поверхностью, которая для полузаполненной зоны в сечении образует ромб. При этом плотность электронных состояний равна

$$N(\xi) = \frac{1}{2\pi^2 c}\int\frac{dl}{v(\xi)}, \quad (6)$$

где c — постоянная кристаллической решетки в направлении, перпендикулярном плоскости (a, b). Интеграл (6) вычисляется вдоль изоэнергетической линии $\xi = \mathrm{const}$, при этом в нашем случае необходимо учесть изменение скорости $v(\xi)$ вдоль линии интегрирования. Из (1) имеем $v(\xi) = Ba\sqrt{\sin^2(p_x a) + \sin^2(p_y a)}$, и, выполняя интегрирование, для $N(\xi)$ получаем

$$N(\xi) = \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{Ba^2c}K\left(\sqrt{1 - (\xi/2B)^2}\right), \quad (7)$$

$K(\xi)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Используя асимптотическое выражение для $K(\xi)$ для полузаполненной зоны $(\xi \to 0)$, получаем логарифмическую особенность в плотности состояний

$$N(\xi) \approx \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{Ba^2c}\ln\left|\frac{8B}{\xi}\right|. \quad (8)$$

С учетом (8) выражение (5) приводится к виду

$$\overline{\Delta C_{ijkl}} \approx \frac{4}{\pi^2}\theta_{ij}\theta_{kl}\frac{1}{Ba^2c}\int\ln\left|\frac{8B}{\xi}\right|\left\{\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right)\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)^2\right\}d\xi. \quad (9)$$

Для оценки выражения (9) ограничимся случаем изотропной щели Δ. Как известно [18], из-за анизотропного характера электрон-фононного взаимодействия возможно возникновение анизотропии щели. Однако для металлических сверхпроводников подробное рассмотрение приводит к небольшой анизотропной поправке $\Delta_1(\mathbf{p})$ в изотропной части Δ, которую здесь учитывать не будем. Оценивая (9) вблизи особенности $N(\xi)$, получаем

$$\overline{\Delta C_{ijkl}} \approx -\frac{4}{\pi^2}\theta_{ij}\theta_{kl}\frac{1}{Ba^2c}\left\{\frac{2B}{T}\frac{\exp(\Delta/T)}{[1+\exp(\Delta/T)]^2}\left[\ln(4e)-\frac{\pi\Delta}{4B}\ln\left(\frac{8B}{\Delta}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{\Delta}{2T}\right)\ln\left(\frac{16B}{\Delta}\right)\right\}. \quad (10)$$

Выражение (10) сильно упрощается для случая $(\Delta/B) \ll 1$, когда

$$\overline{\Delta C_{ijkl}} \approx -\frac{8}{\pi^2}\theta_{ij}\theta_{kl}\frac{\ln(4e)}{a^2c}\frac{1}{T}\frac{\exp(\Delta/T)}{[1+\exp(\Delta/T)]^2}. \quad (11)$$

В нормальной фазе ($\Delta=0$) $\overline{\Delta C_{ijkl}}$ растет с уменьшением температуры $\sim 1/T$ и не имеет особенности при $T=T_c$. В сверхпроводящей фазе $T<T_c$ характер $\overline{\Delta C_{ijkl}}(T)$ становится немонотонным, что связано с увеличением сверхпроводящей щели $\Delta(T)$, с одной стороны, и увеличением плотности $N(\xi)$ — с другой. Конкретный вид температурного поведения $\overline{\Delta C_{ijkl}}(T)$ существенно определяется характером зависимости $\Delta(T)$. Можно показать, что вблизи T_c стандартное рассмотрение приводит к обычной корневой зависимости $\Delta(T) \approx \Delta_0\sqrt{1-T/T_c}$. В этом случае $|\overline{\Delta C_{ijkl}}|$ имеет максимум по температуре в области $T<T_c$ (соответственно для скорости ультразвука будет минимум), конкретное положение которого определяется численным значением Δ_0/T_c. Если принять $\Delta_0/T_c \approx 1.76$, то минимум скорости будет в точке $T_м \approx 0.9T_c$, при этом относительное уменьшение скорости при $T=T_м$ по отношению к $T=T_c$ должно составлять около 12 %. При дальнейшем уменьшении температуры $|\overline{\Delta C_{ijkl}}|$ убывает, что приводит к увеличению скорости ультразвука.

Сделаем теперь оценки для случая грязных сверхпроводников, следуя [17]. В этом случае интересующие нас гриновские функции получаются из (3) заменой $\{\omega_n, \Delta\} \to \{\omega_n\eta_n, \Delta\eta_n\}$, где $\eta_n=1+(2\tau\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2})^{-1}$, τ — время релаксации. Теперь в выражении (2) удобно вначале выполнить интегрирование по $\mathbf{p}$. Ограничиваясь, как и в (4), случаем $\omega_n=0$ и при условии $(\Delta/B) \ll 1$, из (2) имеем

$$\overline{\Delta C_{ijkl}} = -\frac{8\ln(4e)}{\pi^2}\theta_{ij}\theta_{kl}\frac{T}{(a^2c)}\sum_\nu\frac{\omega_\nu^2+\Delta^2}{(\sqrt{\omega_\nu^2+\Delta^2}+\gamma)^2}\frac{1}{(i\omega_\nu+\Delta)^2}, \quad (12)$$

где $\gamma=(2\tau)^{-1}$ — частота столкновений. Сумму в (12) можно представить в виде

$$\sum_\nu\frac{\omega_\nu^2+\Delta^2}{(\sqrt{\omega_\nu^2+\Delta^2}+\gamma)^2}\frac{1}{(i\omega_\nu+\Delta)^2}=$$
$$=\frac{2\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+\gamma^2)^2}\sum_\nu\frac{1}{\omega_\nu^2+(x^2+\Delta^2)}\left[1-\frac{2\Delta^2}{\omega_\nu^2+\Delta^2}\right]dx. \quad (13)$$

Выполняя в (13) суммирование, получим

$$\overline{\Delta C_{ijkl}} = -\frac{4\ln(4e)}{\pi^3}\theta_{ij}\theta_{kl}\frac{\gamma}{a^2c}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+\gamma^2)^2}\left\{(x^2+\Delta^2)^{-1/2}\,\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{x^2+\Delta^2}}{2T}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\Delta^2}{x^2}\left[(x^2+\Delta^2)^{-1/2}\,\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{x^2+\Delta^2}}{2T}\right)-\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{th}\left(\frac{\Delta}{2T}\right)\right]\right\}dx. \quad (14)$$

Подынтегральная функция в (14) имеет максимум при $x^2 \simeq \gamma^2$. Учитывая, что $\mathrm{th}(\sqrt{x^2+\Delta^2}/2T)$ является плавной функцией x, а основной вклад вносят $x^2 \simeq \gamma^2$, оценка (14) дает

$$\overline{\Delta C_{ijkl}} = -\frac{4\ln(4e)}{\pi^3}\theta_{ij}\theta_{kl}(a^2c)^{-1}\left\{\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{\gamma^2+\Delta^2}}{2T}\right)\left[\frac{\Delta^2(2\Delta^2-3\gamma^2)}{\gamma^2(\Delta^2-\gamma^2)^{3/2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{\Delta^2-\gamma^2}}{\gamma}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2\Delta^2+\gamma^2}{\gamma(\Delta^2-\gamma^2)}\right]-\pi\frac{\Delta}{\gamma^2}\,\mathrm{th}\left(\frac{\Delta}{2T}\right)\right\}. \tag{15}$$

Выражение (15) справедливо при любом соотношении между Δ и γ, так как в случае $\gamma > \Delta$ $(\Delta^2-\gamma^2)^{-3/2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\Delta^2-\gamma^2}/\gamma\right) = -{}^1/_2(\gamma^2-\Delta^2)^{-3/2}\times$ $\times\ln\left[\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\Delta^2}\right)/\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\Delta^2}\right)\right]$. Из (15) легко получить предельные случаи. Если $\gamma^2 \gg \Delta^2$, то имеем следующую асимптотику:

$$\overline{\Delta C_{ijkl}} \approx -\frac{4\ln(4e)}{\pi^3}\theta_{ij}\theta_{kl}(a^2c)^{-1}\gamma^{-1}. \tag{16}$$

В противоположном случае $\gamma^2 \ll \Delta^2$ выражение (15) переходит в полученный выше результат (11) с максимумом при $T < T_c$. Таким образом, обсуждаемая здесь особенность скорости ультразвука может иметь место только при $\gamma \lesssim \Delta$.

Обсудим влияние трехмерности спектра, т. е. наличие в (1) дополнительного слагаемого вида $\xi_1 = -B_1\cos p_z c$. Тогда для плотности состояний $N(\xi)$ вместо (7) имеем

$$N(\xi) = (\pi B a^2 c)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\frac{\xi}{B}x\right)J_0^2(x)\,J_0\left(\frac{B_1}{B}x\right)dx, \tag{17}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя. Используя для $J_0(x)$ интегральное представление, получаем

$$N(\xi) = (\pi^3 B a^2 c)^{-1}\int_{-\pi}^{+\pi}K\left[1-(B_1\sin\theta+\xi/2B)^2\right]d\theta. \tag{18}$$

При $(B_1/B) \ll 1$ и вблизи ПФ, учитывая асимптотическое поведение $K(x)$, получаем

$$N(\xi) \simeq 2(\pi^2 B a^2 c)^{-1}\ln\left[16B/\left(|\xi|+\sqrt{\xi^2+B_1^2}\right)\right]. \tag{19}$$

Из (19) следует, что влияние B_1 будет пренебрежимо мало при условии $(B_1/\omega_2)^2 \ll 1$.

Авторы выражают благодарность Г. М. Генкину за интерес к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Bishop D. J., Gammel P. L., Ramires A. P. e. a. // Phys. Rev. 1987. V. 35. N 16. P. 8788—8790.
[2] Esquinazi P., Luzuriaga J., Duran C. e. a. // Phys. Rev. 1987. V. 36. N 4. P. 2316—2324.
[3] Чернозатонский Л. А., Головашкин А. И., Иваненко О. М. и др. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 3. С. 882—884.
[4] Барьяхтар В. Г., Пан В. М., Таборов В. Ф. и др. // ФНТ. 1987. Т. 13. № 8. С. 848—849.
[5] Mathias H., Moulten W., Pan S. J. e. a. // Phys. Rev. 1987. V. 36. N 4. P. 2411—2413.
[6] Shivaram B. S., Jeong Y. H., Rosenbaum T. E., Hinks D. E. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1078—1080.
[7] Qian Y. J., Xu M.-F., Schenstrom A. e. a. // Sol. St. Comm. 1987. V. 63. P. 599—611.
[8] Coffey L. // Phys. Rev. 1987. V. B 35. N 16. P. 8440—8448.
[9] Mattheiss L. F. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. N 10. P. 1028—1030.
[10] Machida K., Kato M. // Phys. Rev. 1987. V. 36. N 1. P. 854—856.
[11] Okabe Y., Suzumura Y., Sasaki T., Katayma H. // Sol. St. Comm. 1987. V. 64. N 4. P. 483—487.
[12] Горьков Л. П., Копнин Н. Б. // УФН. 1988. Т. 156. № 1. С. 117—135.
[13] Булаевский Л. Н., Гинзбург В. Л., Собянин А. А. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 1. С. 355—375.

[14] Антонов В. Н., Антонов Вл. Н. Барьяхтар В. Г. и др. // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. № 2. С. 732—741.
[15] Mattis D. C. // Phys. Rev. 1987. V. 36. N 1. P. 745—747.
[16] Coffey L., Cox D. L. // Phys. Rev. 1988. V. 37. N 7. P. 3389—3395.
[17] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: ГИФМЛ, 1962. 443 с.
[18] Гейликман Б. Т., Кресин В. З. Кинетические и нестационарные явления в сверхпроводниках. М.: Наука, 1972. 175 с.

Горьковский институт
инженеров водного транспорта

Поступило в Редакцию
9 июня 1989 г.
В окончательной редакции
26 марта 1990 г.