07

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ДИФРАКЦИОННОГО ИНТЕГРАЛА ФРЕНЕЛЯ

© *Ш.Д.Какичашвили, Е.Ш.Какичашвили*

В работе [1] рассмотрен дифракционный интеграл Френеля на основе модифицированного для электромагнитных волн принципа Гюйгенса–Френеля. В этой модификации в полном соответствии с исходными идеями Френеля элементарная вторичная волна предполагается реальным физическим образованием. Как известно, Френель в своей работе [2] даже постулирует структуру вторичной волны. В отличие от этого в дифракционном интеграле Кирхгофа вторичная волна фигурирует "лишь в качестве вспомогательной математической величины" [3,4].

В предлагаемой работе идея вторичной волны претерпевает дальнейшую модификацию, имея целью создание математически непротиворечивого дифракционного интеграла. При этом описываются также и предельные случаи свободно распространяющейся волны и исходного поля на самом дифрагирующем отверстии. Эти случаи ранее не описывались дифракционными интегралами Френеля и Кирхгофа.

Как известно, волновому уравнению кроме волн с вещественным значением волнового вектора (однородные волны) удовлетворяют также и волны с комплексным значением этого вектора (неоднородные, так называемые затухающие волны) [5]. Последние формируются на границах материальных сред [6]. При этом длина волны оказывается зависящей от комплексного направления волнового вектора. В работе [7] описывается поле вблизи источника на основе совместной аппроксимации плоских однородных и неоднородных волн.

Представляется правомочным рассмотреть также волны, удовлетворяющие волновому уравнению, однако характеризуемые комплексным значением лишь волнового числа $\hat{\varkappa} = \varkappa' + i\varkappa''$, где $\varkappa' = \frac{2\pi}{\lambda'}, \varkappa'' = \frac{2\pi}{\lambda''}$. При этом для соответствующих круговых частот справедливо $\hat{\omega} = \omega' + i\omega'' = c\hat{\varkappa}$ (c — скорость света).

Запишем сферическую волну от точечного источника в форме, использованной в работе [8], с одновременным обобщением волнового числа на комплексное значение

$$\frac{\exp i(\hat{\omega}t - \hat{\varkappa}r)}{-i\hat{\varkappa}r}, \tag{1}$$

где r — расстояние до точки наблюдения. При этом наблюдаемой предполагается действительная часть этого выражения. Легко показать, что форма (1) снимает проблему возникновения сингулярности амплитуды на самом источнике ($r = 0$), одновременно удовлетворяя волновому уравнению.

Мы полагаем, что комплексный характер волнового числа в (1) существенным образом проявляется лишь в ближайших окрестностях источника и ростом расстояния быстро приобретает свойства обычной сферической волны с вещественным $\varkappa$. Исходя из этого, поставим задачу выразить компоненты комплексного $\hat{\varkappa}$ через заданное $\varkappa$ и расстояние до источника. Для этого воспользуемся дифракционным интегралом Френеля без так называемого коэффициента наклона [9]. При этом (1) используем в качестве описания вторичной волны. Для упрощения дальнейших выкладок, что принципиально не ограничивает общности последующего рассмотрения, в качестве просвечивающей объект используем плоскую волну $E_0 \exp i(\omega t - \varkappa z)$, распространяющуюся вдоль оси z:

$$E(x,y,z,t) = \iint\limits_{S_0} E_0(x_0,y_0,z_0) \exp -i\varkappa z_0 \frac{\exp i(\hat{\omega} t - \hat{\varkappa} r)}{-i\hat{\varkappa} r} dx_0 dy_0. \tag{2}$$

Здесь $E(x,y,z,t)$ — поле в точке наблюдения x,y,z; $E_0(x_0,y_0,z_0)$ — координатная часть поля непосредственно за дифрагирующим объектом в точке x_0, y_0, z_0; $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ — расстояние от объекта до точки наблюдения. Интегрирование проводится по области S_0, занятой объектом.

Вычислим (2) в асимптотическом приближении [9] для свободно распространяющейся плоской волны. Получаем

$$E(x,y,z,t) = \frac{2\pi E_0}{\varkappa'(\varkappa' + i\varkappa'')} \exp -i\varkappa z_0 \exp i\left[\hat{\omega} t - \hat{\varkappa}(z - z_0)\right]. \tag{3}$$

Левая часть этого равенства в рассматриваемом случае априорно равна $E_0 \exp i(\omega t - \varkappa z)$. В правой части наличие $\varkappa$, r и E_0 позволяет связать их с искомыми компонентами комплексного волнового числа $\varkappa'$ и $\varkappa''$. Приравнивая левую и правую части (3), получим для координатной части комплексное уравнение

$$2\pi E_0 \exp -i\left[(\varkappa - \varkappa') + i\varkappa''\right](z - z_0) - \varkappa'(\varkappa' + i\varkappa'') = 0. \tag{4}$$

В таблице приводятся численные данные решения $\varkappa'$ и $\varkappa''$ уравнения (4) для различных расстояний наблюдения

$\varkappa = 2\pi$ ($\lambda = 1$ мкм), $E_0 = 1$

$z - z_0$	$\varkappa'$	$\varkappa''$	λ'	λ''
0	2.50662	0	2.50662	∞
0.01	2.50692	0.09471	2.50634	66.33916
0.1	2.54213	0.99802	2.47162	6.29562
0.2	2.76829	2.33000	2.26970	2.69665
0.3	3.65387	5.14163	1.71959	1.22202
0.4	4.60719	3.65312	1.36377	1.71994
0.5	5.16803	3.22269	1.21572	1.94967
0.75	5.77273	2.32475	1.08842	2.70274
1	5.99357	1.78604	1.04832	3.51795
10	6.28026	0.18662	1.00046	33.66845
10^2	6.28316	0.01838	1.00000	$3.419 \cdot 10^2$
10^4	6.28318	0.00018	1.00000	$3.418 \cdot 10^4$

$(z - z_0)$ от источника при выбранном $\varkappa = 2\pi$ ($\lambda = 1$ мкм) и $E_0 = 1$. Для наглядности приводятся также соответствующие λ' и λ''. Из таблицы видно, что на самом источнике вторичной волны $\lambda' \approx 2.5$ мкм, $\lambda'' = \infty$. С увеличением расстояния, λ' довольно быстро приближается к 1 мкм и начиная с расстояний $10^2 - 10^4$ мкм практически не отличается от единицы. λ'' на расстоянии $(z - z_0) \approx 0.3$ мкм принимает минимальное значение, после которого нарастает с ходом, почти пропорциональным расстоянию.

Легко показать, что, воспользовавшись дифракционным интегралом в форме (2), возможно описать также поле на самом дифрагирующем отверстии непосредственно за объектом. Полагая в (3) $z - z_0 = 0$ и использовав решение (4), получим

$$E(x, y, z) = E_0(x, y, z) \exp -i\varkappa z. \tag{5}$$

Расчет показывает, что выбор значения E_0 практически влияет на значения $\varkappa'$ и $\varkappa''$ лишь в непосредственной близости от источника на расстояниях, меньших длины волны λ. Полное исследование решений (4) и областей их существования представляет самостоятельную математическую задачу и в данной работе не проводится.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на очевидную полезность, в частности для создания непротиворечивого дифракционного интеграла, гипотеза о комплексности значения волнового числа $\hat{\varkappa}$ требует более убедительного обоснования, особенно в экспериментальной части. Постановка соответствующих экспериментов, на наш взгляд, потребует серьезных усилий.

Применение аналогичной идеи у векторной модификации дифракционного интеграла предполагается провести в дальнейшем.

Список литературы

[1] *Какичашвили Ш.Д.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 5. С. 66–70.
[2] *Френель О.* Избранные труды по оптике. М.: ГИТТЛ, 1955. 604 с.
[3] *Зоммерфельд А.* Оптика. М.: ИЛ, 1953. 486 с.
[4] *Кирхгоф Г.* Избранные труды. М.: Наука, 1988. 430 с.
[5] *Розенберг Г.В.* Оптика тонкослойных покрытий. М.: ГИФ-МЛ, 1958. 570 с.
[6] *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 503 с.
[7] *Шмидт-Вайнмар Х.Г.* Восстановление источников с пространственным разрешением меньше длины волны по оптическим изменениям в дальней зоне. Обратные задачи в оптике / Под ред. Г.П. Болтса. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1984.
[8] *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950. 456 с.
[9] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики М.: Наука, 1979. 855 с.

Институт кибернетики
АН Республики Грузия

Поступило в Редакцию
11 октября 1996 г.