

ДИНАМИКА СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ПОРОГОВОЙ СВЯЗЬЮ

© А.А.Короновский, В.И.Пономаренко, Д.И.Трубецков

Дискретные отображения и связанные системы из них (цепочки, решетки и т.п.) широко исследуются физиками и математиками [1,2]. Такие отображения используются для описания процессов не только в физических, но и в экологических, экономических и социальных системах [3,4]. Внимание к системам с дискретным временем определяется их относительной простотой, а также возможностью их быстрого исследования в широком диапазоне изменения управляющих параметров.

Среди дискретных отображений можно выделить логистическое отображение, которое играет фундаментальную роль в теории критических явлений у порога динамического хаоса [5]. Более того, на основе логистического отображения строятся широкие классы связанных отображений, цепочек и решеток отображений, играющих важную роль в понимании сложной динамики простых систем [1].

В настоящей работе исследована динамика связанных отображений вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n \left(a - x_n \pm s \times \operatorname{sgn}(y_n - y_s) \right), \\y_{n+1} &= y_n \left(a - y_n \pm s \times \operatorname{sgn}(x_n - x_s) \right),\end{aligned}\tag{1}$$

как численно, так и с помощью радиотехнической модели. Преимуществом натурального эксперимента является возможность исследования систем в реальном времени. Кроме того, в экспериментальной системе существенными являются внешние и внутренние шумы и неидентичность отдельных подсистем, что приводит к "отсеиванию" режимов, неустойчивых по отношению к подобным "возмущениям" (см., например, [6]).

Два логистических отображения связаны друг с другом принципиально новым типом связи, которую мы называем двунаправленной пороговой связью. Выбор параметров a и s осуществляется таким образом, чтобы каждое из логистических отображений по отдельности не демонстрировало никакой сложной динамики. Когда же рассматриваются

подается через инвертор 5, что обеспечивает противофазное замыкание ключей (когда ключ 6 замкнут, ключ 8 разомкнут, и наоборот). В процессе работы линейный блок обеспечивает запоминание выходного напряжения нелинейного блока и трансляцию его на вход нелинейного блока, создавая таким образом изменение напряжений на конденсаторах C_1 и C_2 , соответствующее дискретной последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$.

Нелинейный блок содержит компаратор 1, суммирующий усилитель 2 и умножитель 3, а также элементы регулировки параметров y_s, a, s . На один вход компаратора 1 подается постоянное напряжение, соответствующее параметру y_s , а на другой вход — переменная y , вырабатываемая вторым каналом схемы. Такое включение соответствует связи, действующей со стороны второго канала на первый, со знаком “-”. Выход компаратора соответствует функции $\text{sgn}(y - y_s)$. Размах выходного напряжения регулируется при помощи резистивного делителя. Результирующее напряжение, равное $s \times \text{sgn}(y - y_s)$, подается на один из входов суммирующего усилителя. На второй его вход подается регулируемое напряжение, соответствующее параметру нелинейности a , и на третий вход — переменная x , каждое из слагаемых со своим знаком. Напряжение с выхода суммирующего усилителя, равное $[a - x + s \times \text{sgn}(y - y_s)]$, подается на один из входов аналогового умножителя 3, а на другой его вход подается напряжение x . С выхода его снимается напряжение, пропорциональное $[x(a - x + s \times \text{sgn}(y - y_s))]$. Вторая часть схемы, не показанная на рисунке, отличается подключением входов компаратора, которое реализует пороговую связь, действующую со стороны первого канала на второй, со знаком “+”.

Как показывает проведенное исследование, результаты натурального и численного экспериментов находятся в очень хорошем соответствии друг с другом. Рассчитанная карта режимов поведения системы двух связанных логистических отображений при значениях параметров $a = 1.2, s = 0.25$ приведена на рис. 2. Плоскость параметров (x_s, y_s) оказывается разделенной на две большие области — “равнину”, на которой реализуются устойчивые колебания периода 1, и “шахматную доску”, которая, в свою очередь, разбита на прямоугольные области, внутри которых реализуются колебательные режимы различных периодов. Для “шахматной доски” можно выявить следующую интересную закономерность: в центре находятся колебательные режимы с малыми периодами колебаний, а при продвижении по вертикали к краям “доски” происходит увеличение периода колебаний на единицу. Между областями, соответствующими

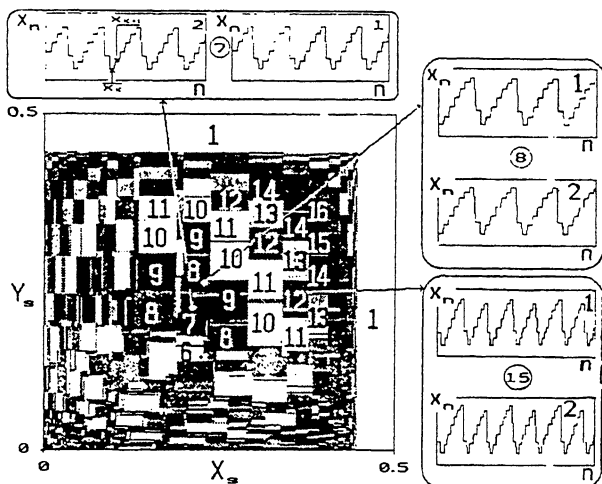


Рис. 2. Плоскость параметров (x_s, y_s) и временные реализации переменной x_n для режимов периода 7, 8 и 15. Кривые 1 соответствуют натурному, 2 — численному экспериментам.

колебаниям с периодами $(n - 1)$ и n находятся узкие области режимов более высоких периодов, причем для этих режимов, лежащих между $(n - 1)$ и n , самым низким является период колебаний $(2n - 1)$ (рис. 2). Следует отметить, что подобный сценарий реализуется и во многих других системах как с дискретным, так и с непрерывным временем [5,7].

Приведенные результаты расширяют представления о динамике связанных логистических отображений. Рассмотрен принципиально новый тип связи, при котором, несмотря на то, что каждая из подсистем демонстрирует лишь устойчивое состояние равновесия, в системе из двух связанных логистических отображений реализуются периодические, а при других значениях параметров a и s и хаотические колебания. Следует также отметить, что пороговая связь во многом аналогична кооперативному и антагонистическому взаимовлияниям, описанным профессором Штутгартского университета В. Вайдлихом [8], анализ которых играет важную роль при моделировании социально-экономических систем [9].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96-02-16753.

Список литературы

- [1] *Kaneko K.* Theory and applications of coupled map lattices. John Wiley and Sons, Ltd, Baffins Lane, Chichester, West Sussex PO 19 1UD, England. 1993. 191 p.
- [2] *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989. 216 с.
- [3] *Смит Дж.М.* Модели в экологии. М.: Мир, 1976.
- [4] *Kazuhiro Saton, Takashi Aihara* // Journal of the Physical society of Japan. V. 59. N 4. April 1990. P. 1184-1198.
- [5] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1. № 1,2. С. 15-33.
- [6] *Родригес-Васкес А., Хуэртас Х.Л., Руэда А., Перес-Вердю Б., Чжуа Л.О.* // ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 8. С. 124-140.
- [7] *Андрушкевич А.В. и др.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII. № 11. С. 1195-1203.
- [8] *Weidlich W.* // Phys. Repts. 1991. V. 204. N 1. P. 1-169.
- [9] *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж". 1995. 130 с.

Институт радиотехники и электроники
Саратовский филиал

Поступило в Редакцию
1 июля 1996 г.

