01

ТОЖДЕСТВО ЛАГРАНЖА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ НЕСИММЕТРИЧНОЙ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

© *Э.А.Тропп*

1. Геометрическая интерпретация играет важную роль в теории самосопряженных линейных уравнений в частных производных второго порядка [3]. Представляет определенный интерес сопоставить геометрические образы и несамосопряженным дифференциальным операторам. Рассмотрим линейный дифферециальный оператор (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):

$$L[u] \equiv a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Оператор (1) предполагается несамосопряженным:

$$\beta_i = b_i - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \neq 0. \tag{2}$$

Не уменьшая общности, можно считать "вектор несамосопряженности" β_i соленоидальным:

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} = 0, \tag{3}$$

поскольку, если условие (3) не выполнено, то можно вместо дифференциального оператора (1) рассмотреть оператор $L' = h(x)L$ и подобрать множитель $h(x)$ так, чтобы для оператора L' условие (3) выполнялось. Для этого достаточно взять в качестве множителя $h(x)$ любое ненулевое решение уравнения

$$a_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} + \left(2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i\right)\frac{\partial h}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right) h = 0. \tag{4}$$

Соленоидальный вектор β_i можно выразить через антисимметричный тензор

$$\beta_i = \frac{\partial \hat{a}_{ij}}{\partial x_j}, \quad \hat{a}_{ij} = -\hat{a}_{ji}. \tag{5}$$

При условии (3) оператору L и сопряженному ему оператору

$$M[\nu] \stackrel{dif}{=} \frac{\partial^2 a_{ij}\nu}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial b_i \nu}{\partial x_i} + c\nu$$

можно придать вид

$$L^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} \pm \beta_i\right) + c = \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \pm \beta \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

где $L^+ = L, L^- = M$. Операторы L и M связаны известным соотношением (тождеством Лагранжа):

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\nu L[u] - uM[\nu]\Big) dx = \int\limits_{\partial\Omega} p_i \cos nx_i dS. \qquad (6)$$

Для самосопряженных операторов ($L = M$), кроме тождества (6), полезно “промежуточное” соотношение (формула Грина):

$$\int\limits_{\Omega} \nu L[u] d\mathbf{X} = -\int\limits_{\Omega} aij \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} d\mathbf{X} + \int\limits_{\partial\Omega} q_i \cos nx_1 dS, \qquad (7)$$

поскольку первый интеграл в правой части (7) дает выражение для действия

$$S = \int\limits_{\Omega} F\left(\mathbf{X}, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}}\right) d\mathbf{X} = \int\limits_{\Omega} a_{aj} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} d\mathbf{X}, \qquad (8)$$

уравнением Эйлера–Лагранжа которого является исходное уравнение в частных производных

$$\frac{\delta F}{\delta u} = L[u] = 0.$$

При условии (3) и для несамосопряженных операторов можно указать аналогичную (7) форму тождества Лагранжа, в которую производные от u и ν входят равноправно (но не симметрично):

$$\int\limits_{\Omega} \nu L^{\pm}[u] d\mathbf{X} = -\int\limits_{\Omega} (a_{ij} \pm \hat{a}_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\partial\Omega} q_i \cos nx_i dS. \qquad (9)$$

Несимметричную билинейную форму $(a_{ij} + \hat{a}_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \nu}{\partial x_j}$ можно, по аналогии с (8), взять за плотность лагранжиана в функционалах

$$S^{\pm} = \int\limits_{\Omega} F^{\pm}\left(\mathbf{X}, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{X}}, \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{X}}\right) dx = \int\limits_{\Omega} (a_{ij} \pm \hat{a}_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \nu}{\partial x_j} d\mathbf{X}. \quad (10)$$

Уравнениями Эйлера–Лагранжа для фунционалов (10) будут сопряженные уравнения в частных производных:

$$\frac{\delta F^{\pm}}{\delta \nu} = L^{\pm}[u] = 0 \qquad \frac{\delta F^{\mp}}{\delta u} = L^{\mp}[\nu] = 0. \quad (11)$$

2. Квадратичная форма, входящая в функционал (7), и соответствующая ей билинейная форма являются в римановой геометрии дифференциальными параметрами первого рода, а оператор L — дифференциальным параметром второго рода (оператором Бельтрами–Лапласа) [4,5]. С другой стороны, билинейный функционал (10) играет для несамосопряженных операторов ту же роль, что и квадратичный функционал (8) для самосопряженных. Это наблюдение позволяет сопоставить паре операторов L и M дифференциальную геометрию, в которой они будут играть роль дифференциальных параметров Бельтрами–Лапласа. Эта геометрия строится на основе функционала расстояния:

$$J = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(\xi_i)\dot{x}^i \dot{y}^k} dt, \quad (12)$$

$$x_i(t_1) = y_i(t_1) = x_{i1}, \quad x_i(t_2) = y_i(t_2) = x_{i2}, \quad i = 1, 2 \ldots, n$$

$$\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + y_i), \quad g_{ik} = a_{ik} \pm \hat{a}_{ik} \quad (13)$$

(Точкой в (12) обозначается дифференцирование по параметру t).

Наряду с расстоянием $J = J^{+}$ можно рассмотреть и расстояние J^{-}, в котором переменные x^i и y^i (или индексы i и k) переставлены. Выбор полусуммы ξ_i векторов x_i и y_i в качестве аргументов метрического тензора g_{ik} обусловлен соображениями простоты, вместо ξ_i можно, вообще говоря, взять любую симметричную вектор-функцию от x_i и y_i.

Существенной особенностью расстояния (12) является наличие под радикалом билинейной формы

$$\varphi = g_{ik}\, \dot{x}^i\, \dot{y}^k \quad (14)$$

(формально можно было бы представить подкоренное выражение в виде суммы симметричной и внешней квадратичной форм, условившись, что при вычислении значений форм две серии переменных подставляются не только во внешнюю форму (см. [6]), но и в симметричную. Это означает, что в предлагаемой геометрии длина приписывается паре дуг, соединяющих точки x_{i1} и x_{i2}. При этом одна дуга, соединяющая точки, рассматривается как частный случай "двудужия" ("двудольника", "диарка") со слившимися дугами. При этом длина этой слившейся пары определяется только симметричной частью метрического тензора.

Несимметричная форма $g_{ik}\dot{x}^i\dot{y}^k$ предполагается невырожденной:

$$g = \det|g_{ik}| \neq 0. \tag{15}$$

Как и в симметричном случае, уравнения геодезических (экстремалей функционала J) линейно зависимы. Добавляя к ним уравнение $\varphi = 1$, можно привести систему уравнений Эйлера для функционала (1) к виду

$$\varphi_{x_i} - \frac{d}{dt}\varphi_{x_i} = 0, \quad \varphi_{y_i} - \frac{d}{dt}\varphi_{y_i} = 0, \tag{16}$$

причем, как и в симметричном случае, система (5) имеет интеграл $\varphi = \mathrm{const}$. Вводя обычные обозначения для символов Кристоффеля [4]

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k}\right)$$

(в рассматриваемом случае симметрии по первым двум индексам нет!), приводим систему (5) к виду

$$\begin{cases} g_{si}\ddot{x}^x + [pq,i]\dot{x}^p\dot{y}^q + \dot{x}^p(\dot{x}^q - \dot{y}^q)\frac{\partial g_{qi}}{\partial \xi^p} = 0, \\ g_{si}\ddot{y}^s + [qp,i]\dot{x}^q\dot{y}^p + \dot{y}^p(\dot{y}^q - \dot{x}^q)\frac{\partial g_{iq}}{\partial \xi^p} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Как обычно, можно ввести контрвариантные компоненты метрического тензора из условия $g^{is}g_{ks} = \delta^i_k$ и разрешить уравнения (6) относительно $\ddot{x}^i$ и $\ddot{y}^i$.

Замечание 1. Очевидно, что вместо действительных форм a_{ik} и $\hat{a}_{ik}$ можно использовать комплексные, при этом a_{ik} будет эрмитовой: $a_{ik} = a_{ki}$, а $\hat{a}_{ik}$ — использовать комплексные, при этом a_{ik} будет эрмитовой: $a_{ik} = a_{ki}$, а $\hat{a}_{ik}$ — косоэрмитовой: $a_{ik} = -\bar{a}_{ki}$. Небезынтересно и финслерово обобщение расстояния (1):

$$J = \int\limits_{t_2}^{t_2} F(\xi_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i)dt,$$

где F — положительно-однородная функция степени 1 относительно последних двух аргументов:

$$F(\xi_i, k\dot{x}_i, k\dot{y}_i) = kF(\xi_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i), \quad k > 0.$$

Отметим, что в рамках финслеровой геометрии Рандерсом [7] была предложена метрика

$$\sqrt{a_{nm}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n} + b_i(x)\dot{x}^i.$$

Эта метрика асимметричная, т. е. не инвариантная относительно замены касательного вектора x^i на противоположный $-x^i$, что, по мнению Рандерса, отражает выделенность направления времени в действительном пространстве-времени. Метрика (12), в отличие от метрики Рандерса, инвариантна относительно одновременной замены $\dot{x}$ и $\dot{y}$ на $-\dot{x}$ и $-\dot{y}$. Несимметричность метрики проявляется в наличии двух ("лицевого" и "изнаночного") расстояний J^+ и J^-. Относительно метрики Рандерса см. [8].

Замечание 2. Изложенные выше соображения позволяют сформулировать нечто вроде "программы десимметризации" дифференциальной геометрии и смежных с ней областей физики ("Сосновской программы" по месту ее первоначального объявления). Эта программа включает как развитие самой несимметричной римановой (финслеровой) геометрии, так и рассмотрение следствий, к которым приводит десимметризация таких функционалов, как действие для гравитационного поля $\int R\sqrt{-g}d\mathrm{X}$ или струны [9]:

$$S = -\frac{1}{2}T\int\limits_0^\pi d\sigma \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu - \partial_\beta x_\mu, \quad \alpha,\beta = 0,1.$$

Список литературы

[1]. *Hadamar J.* Lectures on Couchy's problem in linear partial differential equations. New Haven: Yall Univ. Press, 1923 (Русск. пер: *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978).

[2] *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

[3] *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

[4] *Eisenhart L.P.* Riemann geometry. Princeton, 1926. (Русск. пер: *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М.: ГИИЛ, 1948).

[5] *Helgason S.* Groups and geometric analisys. Academic Press. Inc. Orlando, San Diego, San Francisco, N.Y., London, Toronto, Montreal, Sydney, Tokio, San Paulo, 1984 (Русск. пер: *Халгасон С.* Группы и геометрический анализ М.: Мир, 1987).

[6] *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.
[7] *Randers G.* Phys. Rev. 1941. V. 59. P. 195–199.
[8] *Асанов Г.С.* О специальных финслеровых пространствах. Добавление 1 в кн.: Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
[9] *Brink L., Henneauh M.* Principles of String Theory. Plenum Press: N.Y., London, 1988 (Русск пер.: *Бринк Л., Энно М.* Принципы теории струн. М.: Мир, 1991).

Физико-технический институт
им. А.Ф. Иоффе РАН
С.-Петербург

Поступило в Редакцию
25 июля 1996 г.