

01;07;09

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИ РАССЕИВАЮЩИХ РЕЗОНАТОРОВ

© А.Е.Дубинов, Г.С.Лазарев

На примере стохастически рассеивающего резонатора типа "стадион" с параболическими зеркалами показано, что с помощью диэлектрической вставки определенной формы можно эффективно управлять степенью стохастичности резонатора.

Известно, что резонаторы в лучевом приближении (бильярды) в зависимости от своей формы подразделяются на регулярные и стохастически рассеивающие [1]. Пример регулярного резонатора — сферический резонатор, а пример стохастически рассеивающего — резонатор типа "стадион".

В работе [2] было показано, что при введении внутрь регулярного резонатора некоторого числа рассеивателей можно добиться стохастизации его лучей, однако чаще всего на практике возникает обратная задача — регуляризация стохастически рассеивающего резонатора путем уменьшения степени его стохастичности.

В данной работе на примере резонатора типа "стадион" показано, что при введении внутрь резонатора диэлектрической вставки определенной формы и размеров можно эффективно управлять степенью его стохастичности.

Геометрия задачи с указанием необходимых размеров показана на рис. 1. Уравнение кривой, задающее форму дуги резонатора, обозначим $\chi = \chi(\xi)$, где $\xi = x/a$; показатель преломления материала диэлектрика — n . Пусть далее $b \ll a \ll l$. Используется лучевое приближение $\lambda \ll b$.

Для вычисления степени стохастичности резонатора воспользуемся методикой, аналогичной [1]. Для этого рассмотрим бильярд типа "гусеница" (рис. 2), который эквивалентен резонатору типа "стадион".

Тогда переменные, характеризующие точку $(i+1)$ -го отражения луча от поверхности дуги, можно записать в следующем рекуррентном виде:

$$\alpha_{i+1} = \arcsin [\cos(\theta_{i+1})/n], \quad (1)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i - 2 \arctg[\chi'(\xi_i)], \quad (2)$$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + [(l - y) \operatorname{ctg}(\theta_{i+1}) + y \operatorname{tg}(\alpha_{i+1})] / a. \quad (3)$$

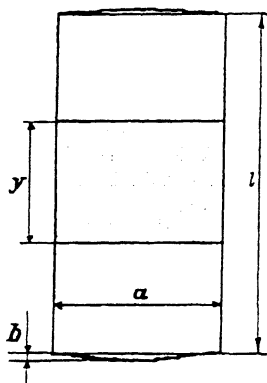


Рис. 1. Схема резонатора типа “стадион” с диэлектрической вставкой.

Вследствие $b \ll a$ можно считать, что производная $\chi'(\xi_i)$ мала (т. е. $\chi'(\xi_i) \ll 1$), и поэтому систему (1)–(3) можно переписать в виде

$$\theta_{i+1} = \theta_i - 2\chi'(\xi_i), \quad (4)$$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + (l - y) \operatorname{ctg}(\theta_{i+1})/a + y \operatorname{tg}\{\arcsin[\cos(\theta_{i+1})/n]\}/a. \quad (5)$$

Критерий стохастичности можно записать из условия расходимости последовательности $\{\xi_i\}$:

$$K = \left| -1 + \frac{d\xi_{i+1}}{d\xi_i} \right| > 1. \quad (6)$$

Дифференцируя, можно получить

$$K = \frac{2\chi''(\xi_i)}{a} \left| \frac{l - y}{\sin^2 \theta_{i+1}} + \frac{y}{n} \cdot \frac{[1 - \cos^2(\theta_{i+1})/n^2]^{-1/2} \sin \theta_{i+1}}{\cos^2\{\arcsin[\cos(\theta_{i+1})/n]\}} \right|. \quad (7)$$

В пределе $\theta_{i+1} \rightarrow \pi/2$, что соответствует условию $a \ll l$, выражение (7) можно упростить и записать в виде

$$K = K_0 \left[1 + \frac{y}{l} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right], \quad (8)$$

где $K_0 = 2\chi''l/a$ — коэффициент растяжения фаз ξ для исходного (без диэлектрической вставки) резонатора. Например, для параболической границы $\chi(\xi) = 4(b/a)\xi(\xi-1)$ имеем

$$K_0 = 16bl/a = \operatorname{const}. \quad (9)$$

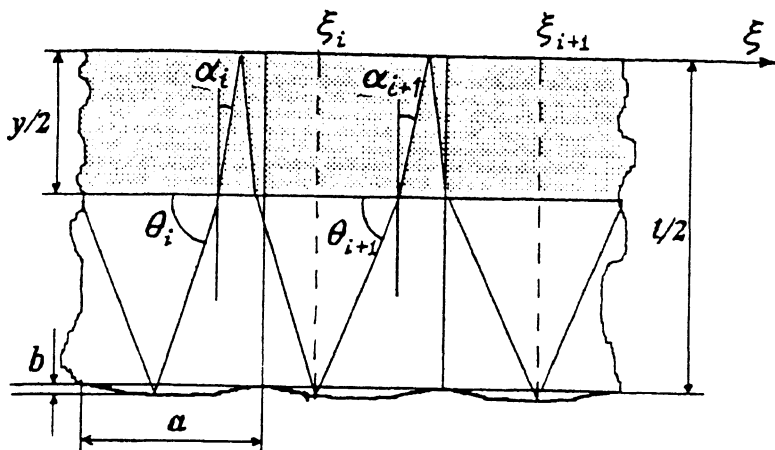


Рис. 2. Ход лучей в бильярде типа "гусеница".

Фактически, выражение (8) — результат минимизации выражения (7) по величине θ_{i+1} в диапазоне $[0; \pi]$.

Выражение (8) позволяет оценить и колмогоровскую энтропию динамической системы (1)–(3):

$$h \sim \ln K = \ln \left\{ K_0 \left[1 + \frac{y}{l} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (10)$$

Легко видеть, что при естественных условиях $0 < y < l$ и $n > 1$ всегда $K/K_0 < 1$, причем отношение K/K_0 тем меньше, чем больше n и больше отношение y/l . Таким образом, введение диэлектрической вставки определенных размеров позволяет уменьшать энтропию лучевой динамики и, следовательно, снижать степень стохастичности резонатора.

Данный результат легко понять из следующих простых соображений.

Причина стохастичности резонаторов типа "стадион" и типа "гусеница" заключается в том, что криволинейные участки стенок резонатора фокусируют лучи, которые, пройдя точку фокуса, дефокусируются, и при следующем соотношении времени фокусировки τ_ϕ и времени свободного пробега τ_c лучей

$$\tau_c > 2\tau_\phi \quad (11)$$

близкие лучи в среднем расходятся. Но диэлектрическая вставка преломляет лучи так, что угол их расхождения, согласно закону Снеллиуса, уменьшается.

Кроме того, дополнительная регуляризация в резонаторе с диэлектрической вставкой имеет место и для лучей с малым значением θ_i за счет их запираания внутри диэлектрика углом Брюстера, однако такая ситуация менее интересна для практических приложений.

Список литературы

- [1] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
- [2] Ганапольский Е.М. // ДАН СССР. 1991. Т. 319. № 5. С. 1128.

Московский
инженерно-физический
институт, отделение № 4
Саров (Арзамас-16)

Поступило в Редакцию
17 мая 1996 г.

