

01;03

О ВЛИЯНИИ ДАВЛЕНИЯ НАСЫЩЕННОГО ПАРА НА ЗАКОНОМЕРНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

© С.О.Шуряева

Несмотря на постоянное внимание к вопросам неустойчивости заряженной поверхности жидкости (см., например, [1] и указанную там литературу), вопрос о влиянии процессов испарения и конденсации на закономерности реализации такой неустойчивости остался за пределами внимания исследователей, хотя связь величины давления насыщенного пара с кривизной поверхности известна давно [2]. Нижеследующее рассмотрение проведем на примере неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости — неустойчивости Тонкса-Френкеля, достаточно подробно исследованной как для идеальной [3], так и для вязкой жидкости [4,5].

Пусть имеется несжимаемая идеально электропроводная жидкость с коэффициентом поверхностного натяжения свободной поверхности σ , кинематической вязкостью ν и удельной плотностью ρ , заполняющая в поле сил тяжести ($\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$, \mathbf{n}_z — орт декартовой оси z ; \mathbf{g} — ускорение силы тяжести) полупространство $z < 0$. Примем, что свободная поверхность жидкости несет нескомпенсированный электрический заряд, однородно распределенный с плотностью κ , а уравнение возмущенной свободной поверхности жидкости в декартовой системе координат имеет вид $z = 0$. Функция же $\zeta(x, y, t)$ описывает малое возмущение равновесной плоской поверхности жидкости, вызванное тепловым капиллярным волновым движением весьма малой ($\zeta_0 \sim (kT/\sigma)^{1/2}$) амплитуды; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура. Поле скоростей движения жидкости, вызванного возмущением $\zeta(x, y, t)$, имеющее тот же порядок малости, обозначим $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$. Без ограничения общности можно принять, что возмущение равновесной поверхности ζ не зависит от координаты y и формируется капиллярными волнами $\zeta_0 \exp(ikx - i\omega t)$, бегущими вдоль оси абсцисс (ω — комплексная частота, k — волновое число, t — время, i — мнимая единица). Примем также, что жидкость находится в термодинамическом равновесии со своим паром.

Система уравнений гидродинамики, описывающая движение жидкости в такой системе, имеет вид [5]:

$$\frac{dU}{dt} \equiv \frac{\partial U}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{r}, t) + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \quad (1)$$

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv z - \zeta(x, t) = 0, \quad \frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F = 0, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

$$(P(\mathbf{r}, t) - P) - 2\rho\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) - P_\sigma + P_\kappa = 0. \quad (4)$$

Здесь $P(\mathbf{r}, t)$ — давление внутри жидкости; P — давление насыщенного параметра; P_σ и P_κ — давление сил поверхностного натяжения и давление электрического поля на свободной поверхности жидкости, в линейном приближении по возмущению $\zeta(x, t)$ равновесной плоской поверхности жидкости, вызванному капиллярным волновым движением [3,6]:

$$P_\sigma = -\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}; \quad P_\kappa = 2\pi\epsilon^{-1} \cdot \kappa^2 + 4\pi\epsilon^{-1} \cdot \kappa^2 \cdot k \cdot \zeta.$$

Учтем теперь, что давление насыщенного пара на свободную поверхность жидкости P зависит от ее локальной кривизны в соответствии с известной формулой [2]:

$$P = P_\infty \cdot \exp(C_*/r); \quad C_* = 2\sigma/\rho RT,$$

где R — газовая постоянная; P_∞ — давление насыщенного пара на бесконечности; r — средний радиус кривизны поверхности в данной точке. Учтем, что средняя кривизна поверхности в окрестности данной точки в линейном по малым величинам приближении определяется выражением

$$\frac{1}{r} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2},$$

тогда для давления насыщенного пара получится соотношение

$$P \approx P_\infty \cdot \exp\left(-C_* \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right).$$

Поскольку показатель степени в экспоненте для всех реальных жидкостей много меньше единицы, то полученное выражение можно упростить:

$$P \approx P_\infty \cdot \left(1 - C_* \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right).$$

Система (1)–(4) представляет собой математическую формулировку решаемой задачи, решая которую в линейном по малым величинам U , ξ приближении методом, описанным в [6], несложно получить дисперсионное соотношение для рассматриваемой системы:

$$\omega^2 + 4i \cdot \nu \cdot k^2 \cdot \omega - 4 \cdot \nu^2 \cdot k^4 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu k^2}} \right) = \omega_0^2; \quad (5)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma k^2(1 + P_\infty/\rho RT) - 4\pi k\kappa^2).$$

В (5) ω_0^2 — квадрат частоты капиллярных колебаний идеальной жидкости в докритическом режиме (в смысле неустойчивости Тонкса–Френкеля) или квадрат инкремента в закритическом режиме. Несложно видеть, что учет процессов испарения и конденсации приводит лишь к появлению поправки к ω_0^2 , пропорциональной $P_\infty/\rho RT$, имеющей смысл увеличения давления под искривленной поверхностью жидкости (эта поправка может быть учтена формальным введением коэффициента “эффективного” поверхностного натяжения: $\sigma_* = \sigma(1 + P_\infty/\rho RT)$), так как имеет ту же структуру зависимости от волнового числа, что и слагаемое, учитывающее лапласовское давление под искривленной поверхностью жидкости).

Для идеальной жидкости критические условия реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля определяются требованием прохождения ω_0^2 через ноль по мере того, как абсолютная величина последнего слагаемого в ω_0^2 , учитывающего давление электрического поля на свободную поверхность жидкости, увеличивается [3]. Если также учесть, что критические условия реализации неустойчивости не зависят от вязкости жидкости, то критическая зависимость между физическими параметрами задачи определится соотношением $\omega_0^2 = 0$. В безразмерных переменных эта зависимость имеет вид

$$x^2(1 + \gamma) - Wx + 1 = 0; \quad (6)$$

$$W = 4\pi\kappa^2 a/\sigma; \quad x = ka; \quad a^2 = \sigma/\rho g; \quad \gamma = P_\infty/\rho RT.$$

Приравнивая нулю первую производную от ω_0 по k , получим соотношение для нахождения волнового числа k наиболее неустойчивой моды капиллярных волн (значение k для волны, инкремент которой имеет максимальную величину):

$$3x^2(1 + \gamma) - 2Wx + 1 = 0. \quad (7)$$

Решения системы (6)–(7) имеют вид

$$W = 2(1 + \gamma)^{1/2}; \quad x = (1 + \gamma)^{-1/2}.$$

Таким образом, с повышением давления насыщенного пара критическое значение параметра W (характеризующего давление электрического поля на свободную поверхность жидкости) и длина наиболее неустойчивой капиллярной волны увеличивается.

Из соотношения (6) следует, что критическое для проявления неустойчивости капиллярной волны с волновым числом k значение параметра W связано с k и γ соотношением

$$W = x(1 + \gamma) + 1/x.$$

Отсюда видно, что с увеличением x (увеличением k при фиксированном a) роль давления насыщенного пара в реализации неустойчивости повышается, т. е. в достаточно сильном электрическом поле, когда неустойчивость претерпевает непрерывная последовательность капиллярных волн из некоторого диапазона волновых чисел, влияние давления насыщенного пара более заметно для самых коротких длин волн.

В большинстве реальных ситуаций, когда приходится сталкиваться с капиллярными колебаниями и неустойчивостью заряженной поверхности жидкости, P_∞ не превышает атмосферного давления и $P_\infty/\rho RT \ll 0.01$, т. е. обсуждаемый эффект обычно пренебрежимо мал. Так, для воды при комнатной температуре $\gamma \equiv P_\infty/\rho RT \approx 2 \cdot 10^{-4}$. Тем не менее для процессов, происходящих при высоком давлении (например, когда электрогидродинамическая неустойчивость заряженной поверхности жидкости используется для диспергирования топлива в камере сгорания реактивного двигателя [7]), вполне реальна ситуация, когда $P_\infty/\rho RT \sim 1$. В этом случае критические значения W и x могут заметно измениться.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // МЖГ. 1994. № 4. С. 3–22.
- [2] Thompson J.J., Thompson G.P. Conduction of Electricity through Gases. V. 1. Cambridge Univ. Press, 1928. 310 p.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. 623 с.
- [4] Алиев И.Н., Филиппов А.В. // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94–98.

- [5] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. N 9. С. 12-21.
- [6] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [7] Jones A.R., Thong K.C. // J. Phys. D.: Appl. Phys. 1971. V. 4. P. 1159-1165.

Ярославский государственный
университет

Поступило в Редакцию
6 мая 1996 г.
