01;03;08

К ВОПРОСУ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

© *Н.М.Бескаравайный, В.Г.Ковалев, В.В.Тульский*

Как известно [1], в результате нелинейного взаимодействия волн, распространяющихся в вязкой жидкости, с преградами около поверхности возникают квазистационарные потоки — акустические течения. Известная асимптотическая оценка установившейся скорости указанных течений на большом расстоянии от препятствия не описывает представляющий как фундаментальный, так и прикладной интерес процесс их формирования. Целью данной работы является развитие нестационарного описания указанного процесса.

Поскольку акустические течения представляют собой медленно развивающийся вблизи преграды процесс, обусловленный вязкостью среды ν, динамику последней целесообразно описывать уравнением Прандтля

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{1}$$

полагая, что препятствие расположено в плоскости xz, а ось y направлена в жидкость. Движение среды, которую можно считать несжимаемой, удовлетворяет также уравнению неразрывности

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Для уравнений (1) и (2) заданы граничные условия: прилипания на стенке

$$V_x|_{y=0} = 0; \qquad V_y|_{y=0} = 0 \tag{3}$$

и предельные – вдали от нее $\lim\limits_{y\to\infty} |V_y| < \infty; \lim\limits_{y\to\infty} V_x = U.$ (4)

Начальные условия в (1) полагаем нулевыми.

Скорость внешнего акустического воздействия зададим выражениями

$$U = U_0 \cos kx \operatorname{Re} \exp(-\omega t), \tag{5}$$

где k, ω — волновое число и частота внешнего возмущения; U_0 — его амплитуда; t — время.

Задачу (1)–(5) решаем методом последовательных приближений, полагая, что $V_x = V_x^0 + V_x'$, $V_y = V_y^0 + V_y'$ и что в каждом приближении квадратичные члены намного меньше линейных.

Уравнение (1) в нулевом приближении имеет вид

$$\frac{\partial V_x^0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 V_x^0}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{6}$$

Решение (6), удовлетворяющее условиям (3), (4), можно получить в виде

$$V_x^0 = U_0 \mathrm{Re}\left\{[1 - exp(i\beta y - \beta y)] \cos kx \exp(-i\omega t)\right\}, \tag{7}$$

где $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$. Подставив (7) в (2), получим

$$V_y^0 = kU_0 \mathrm{Re}\left\{\left[y + \frac{1 - \exp(i-1)\beta y}{\beta(i-1)}\right] \sin kx \exp(-\omega t)\right\}. \tag{8}$$

Уравнение (1) в первом приближении запишем в виде

$$\frac{V_x'}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 V_x'}{\partial y^2} = U\frac{\partial U}{\partial x} - V_x^0 \frac{\partial V_x^0}{\partial x} - V_y^0 \frac{\partial V_x^0}{\partial y}. \tag{9}$$

Подставляя в (9) выражения (5), (7) и (8), вычеркиваем все осциллирующие члены. Этот прием не только упрощает дальнейшие выкладки, но и надежнее, чем последующее усреднение по времени, позволяет выделить неосциллирующие решения, соответствующие акустическим течениям. Вычеркиваем также и быстроубывающие члены содержащие множитель $\exp(-\beta^2 y^2)$. В результате уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial V_x'}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 V_x'}{\partial y^2} = -\frac{kU_0^2}{4} \sin 2kx \exp(-\beta y) \times$$

$$\times [2 + \beta y(\cos \beta y - \sin \beta y)]. \tag{10}$$

Легко видеть, что уравнение (10), являясь параболическим, описывает процесс диффузии системы вихревых течений. Наиболее крупный вихрь имеет размер, равный 1/4 длины волны внешнего возмущения и экспоненциально убывает по мере удаления от стенки. Кроме того, имеются более мелкие вихри, размеры которых порядка глубины проникновения вязких волн β^{-1}.

Решение уравнения (10) можно записать в виде

$$V_x' = \frac{kU_0^2}{8\omega} \sin \exp\left(\frac{\omega t}{2} - \beta y\right) \left[\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\omega t}{2}} - \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) - \right.$$

$$\left. -\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\omega t}{2}} + \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right]. \tag{11}$$

При $\omega t \gg 1$ выражение (11) можно представить в виде

$$V_x' \approx \frac{kU_0^2 \sin 2kx}{8\omega} \left[3 + \frac{2y \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right)}{\sqrt{\pi \nu t}\left(1 - \frac{y^2}{2\nu\omega t^2}\right)}\right]. \tag{12}$$

Вдали от стенки, т. е. при $y \to \infty$, выражение (12) переходит в приведенную в [1] асимптотику

$$V_x' = \frac{3kU_0^2 \sin 2kx}{8\omega}. \tag{13}$$

При малых временах $\omega t \ll 1$ решение (11) можно записать в виде

$$V_x' = \frac{kU_0^2 \sin 2kx}{4\omega} \left(1 + \frac{\omega t}{2}\right) exp(-\beta y) Erf\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right). \tag{14}$$

Поле нормальных скоростей можно только в квадратурах

$$V_y' = \frac{k^2 U_0^2 \cos 2kx}{4\omega} \exp\left(\frac{\omega t}{2}\right) \int\limits_0^y \exp(-\beta\xi) \left[\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\omega t}{2}} - \frac{\xi}{2\sqrt{\nu t}}\right) - \right.$$

$$\left. -\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\omega t}{2}} + \frac{\xi}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right] d\xi. \tag{15}$$

Однако для больших времен выражение (15) можно представить в виде

$$V_y' = \frac{k^2 U_0^2 \cos 2kx}{4\omega} \left[3y - 2\omega \sqrt{\frac{\nu t^3}{\pi}} \exp\left(\frac{\omega t}{2}\right) \mathrm{Ei}\left(\frac{y^2}{4\nu t} - \frac{\omega t}{2}\right)\right]. \tag{16}$$

Для малых времен $\omega \ll 1$, интегрируя (15), получим

$$V'_y \approx -k^2 U_0^2 \cos(2kx) \sqrt{\frac{\nu}{8\omega^3}} \left(1 + \frac{\omega t}{2}\right) \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\omega t}{2} - \exp(-\beta y)\right] \mathrm{Erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right). \qquad (17)$$

Выражения (11)–(17) являются решением задачи о нестационарных акустических течениях. Отметим, что поле скоростей установившегося течения вдали от стенки (13) не зависит от величины вязкости, что совпадает с известными результатами. Однако и поле скоростей вблизи стенки, и скорость формирования течения, как видно из (11) и (12), зависят от вязкости, причем, как видно из сравнения (14) и (17), величина вязкости влияет на скорость формирования нормальной компоненты течения сильнее, чем на тангенциальную компоненту. Численное исследование (11) и (15) показывает, что в случае воды акустическое течение можно считать установившимся при $\omega t > 10$.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

Поступило в Редакцию
8 апреля 1996 г.