

01;03

ЭФФЕКТ ВЛИЯНИЯ ЗАРЯДА НА СТРУКТУРУ СПЕКТРА КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН В ТОНКОМ СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© Д.Ф.Белоножко, А.И.Григорьев,
М.И.Муничев, С.О.Ширяева

При решении различных академических, технических и технологических проблем приходится встречаться с проблемой исследования условий генерации капиллярных волн (и их устойчивости) в заряженном слое жидкости конечной глубины. Это, например, задача об устойчивости водяного слоя на поверхности ледяного ядра (тающей градины) в грозовом облаке, в жидкостном масс-спектрометре вакуумного типа или в жидкометаллических источниках ионов [1-3]). Но несмотря на важность проблемы и имеющиеся попытки ее теоретического анализа [4,5], многие вопросы, связанные с обсуждаемым явлением, пока остаются не выясненными. В частности, сказанное относится к задаче о связи структуры спектра капиллярных волн с плотностью поверхностного заряда и его влияния на закономерности реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля (НТФ).

Будем решать задачу о расчете спектра капиллярных волн на граничащей с вакуумом плоской поверхности идеальнопроводящей жидкости конечной глубины d с плотностью ρ , вязкостью ν , коэффициентом поверхностного натяжения γ , находящейся под воздействием гравитационного поля g и внешнего электростатического поля, вектор напряженности E_0 которого направлен перпендикулярно плоской поверхности жидкости, верхняя среда обладает диэлектрической проницаемостью ϵ . Напряженность поля определяется разностью потенциалов между поверхностью жидкости, имеющей потенциал $\Phi_1 = 0$, и противоэлектродом, отстоящим от поверхности жидкости на высоту b , имеющим потенциал $\Phi_2 = V$. Расположим декартову систему координат так, чтобы ось z была направлена вертикально вверх, перпендикулярно поверхности жидкости, а ось x — по направлению движения плоской волны $\sim \exp(st + izk)$ (здесь s — комплексная частота; k — волновое число), плоскость $z = 0$ совпадает со свободной поверхностью невозмущенной жидкости. Пусть функция $\xi(x, t)$ описывает малое возмущение равновесной плоской поверхности жидкости, вызванное тепловым капиллярным волновым движением бесконеч-

но малой амплитуды; $U(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей движения жидкости, вызванного возмущением $\xi(x, t)$.

Линеаризованная система уравнений гидродинамики вязкой жидкости, описывающая движение жидкости в анализируемой системе, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{U}) + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad (2)$$

$$z \rightarrow -d: \quad \mathbf{U} = 0; \quad (3)$$

$$z = 0: \quad -\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} + U_z = 0; \quad (4)$$

$$z = 0: \quad \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0; \quad (5)$$

$$z = 0: \quad -P(\mathbf{U}) + \rho g \xi + 2\rho \nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} - P_E(\xi) + P_\sigma(\xi) = 0; \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_i = 0; \quad \mathbf{E}_i = -\nabla \Phi_i; \quad (i = 1, 2); \quad (7)$$

$$z = -d: \quad \Phi_1 = 0; \quad z = b: \quad \Phi_2 = V; \quad (8)$$

$$z = \xi: \quad \Phi_1 = \Phi_2; \quad (9)$$

Φ_i — потенциал электрического поля; $P(\mathbf{U})$, $P_E(\xi)$, $P_\sigma(\xi)$ — добавки к давлению внутри жидкости при наличии электрического поля, давлению электрических сил и давлению сил поверхностного натяжения, вызванные возмущением поверхности ξ и имеющие первый порядок малости по \mathbf{U} и ξ [6,7]; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к свободной поверхности жидкости; индекс 1 относится к жидкости, 2 — к внешней среде. Проводя решение задачи методом, подробно описанным в [7], можно найти дисперсионное уравнение для спектра капиллярных движений жидкости в анализируемой системе, безразмерных переменных, в которых $g = \rho = \gamma = 1$, имеющее вид

$$\begin{aligned} & \frac{4qk^2(k^2 + q^2)}{\operatorname{sh}(kd)\operatorname{sh}(qd)} - (k^2 + q^2)^2 (q \operatorname{cth}(kd) \operatorname{cth}(qd) - k) + \\ & + 4k^3 q (q - \operatorname{cth}(kd) \operatorname{cth}(qd)) = \\ & = \frac{1}{\nu^2} (k + k^3 - Wk^2 \operatorname{cth}(kb)) (q \operatorname{cth}(qd) - k \operatorname{cth}(kd)); \quad (10) \end{aligned}$$

$$q^2 = k^2 + s/\nu, \quad W = \frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi}, \quad E_0 = V/b.$$

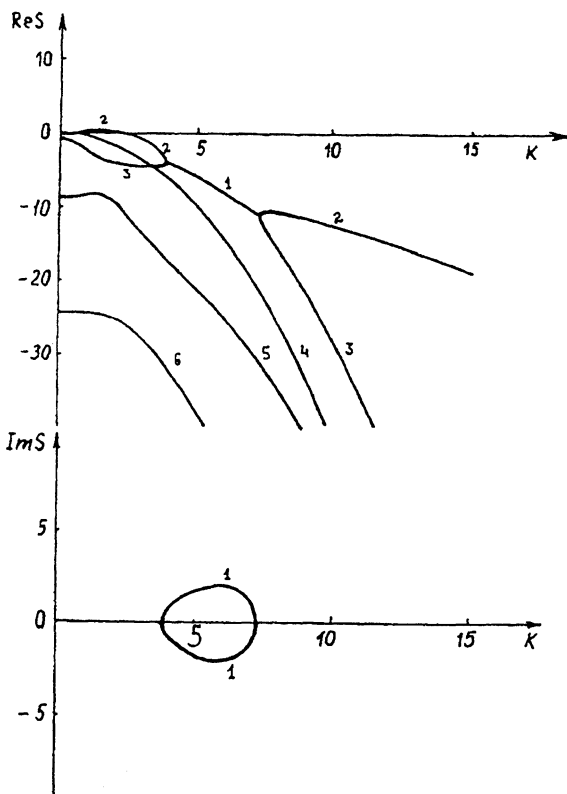


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты s реализующихся капиллярных движений жидкости от величины безразмерного волнового числа k , рассчитанные при $b = 10$; $d = 1$; $\nu = 0.4$; $W = 2.5$.

В предельном случае бесконечно глубокой невязкой жидкости (10) принимает вид

$$s^2 = \frac{k}{\rho} (\varepsilon E_0^2 k \operatorname{cth}(kb) - \rho g - \gamma k^2),$$

аналогичный выражению, полученному в [6] для идеально проводящей жидкости, отличающийся от него лишь множителем $\operatorname{cth}(kb)$, учитывающим конечность расстояния до верхнего электрода. Это незначительное на первый взгляд обстоятельство приводит к интересным физическим последствиям, а именно указывает на зависимость критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости от расстояния до верхнего противоиэлектрода b , которое становится заметной при k , сравнимом с b .

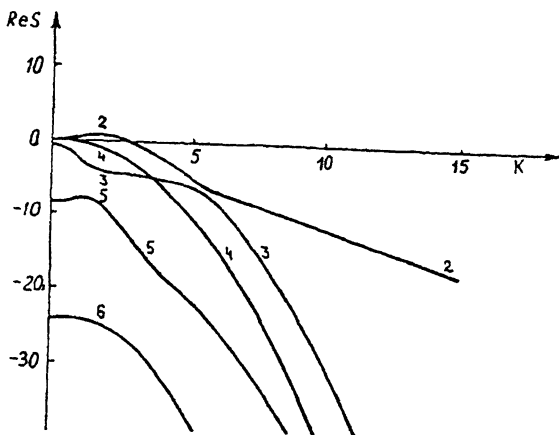


Рис. 2. Зависимости вещественной компоненты безразмерной частоты s реализующихся капиллярных движений жидкости от безразмерного волнового числа k , рассчитанные при $b = 10$, $\nu = 0.4$, $d = 1$, $W = 2.82$.

Результаты численного анализа дисперсионного уравнения (10) проиллюстрированы рис. 1, где представлены зависимости $\text{Re } s = \text{Re } s(k)$ и $\text{Im } s = \text{Im } s(k)$. Кривая 2 на рис. 1, в области $\text{Re } s > 0$, определяет инкремент неустойчивости заряженной поверхности жидкости (НТФ). Кривая 1 описывает затухающее волновое движение. Кривая 3, так же как и часть кривой 2 в области $\text{Re } s < 0$, определяет затухающие апериодические движения жидкости. Все ветви с номерами, большими 3, описывают сильно апериодически затухающие вихревые движения жидкости.

Из рис. 1 видно, что область значений волновых чисел, в которой в тонком слое вязкой жидкости существует капиллярное волновое движение, ограничена как со стороны больших, так и со стороны малых величин. Это связано с влиянием вязкой диссипации в объеме жидкого слоя, с одной стороны, и с сильным затуханием на дне — с другой. Причем с увеличением поверхностной плотности заряда (параметра W) область значений волновых чисел, в которой существуют капиллярные волны, сужается. При $W > 2.81$ капиллярное волновое движение в тонком слое жидкости вообще не возникает и реализуются лишь апериодические движения (см. рис. 2, где приведены результаты расчетов при $W = 2.82$; $d = 1$; $b = 10$; $\nu = 0.4$).

На рис. 3 кривой 1 приведена левая часть кривой 2 с рис. 1, изображенная в более крупном масштабе. При $\text{Re } s > 0$ эта кривая описывает инкремент НТФ. Критическое значение параметра W , при котором реализуется

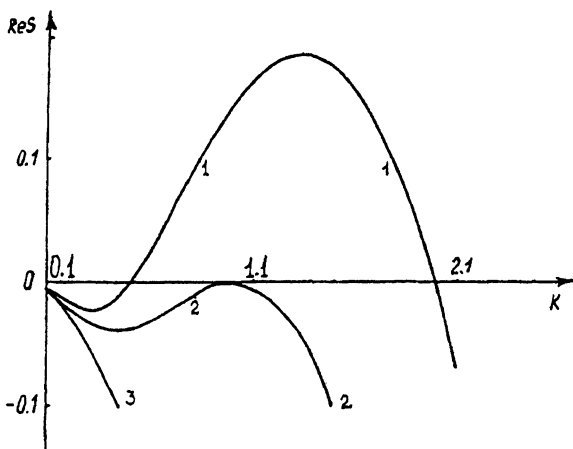


Рис. 3. Зависимости вещественной компоненты обезразмеренной частоты ν реализующихся капиллярных движений жидкости от безразмерного волнового числа k при $b = 10$, $\nu = 0.4$, $d = 1$, рассчитанные: кривая 1 при $W = 2.5$; кривая 2 при $W = 2$; кривая 3 при $W = 1$.

неустойчивость, $W_{кр} = 2$. Кривая 2 на рис. 3 рассчитана именно при этом критическом значении, когда неустойчивость испытывает лишь одна капиллярная волна с $k = 1$ (именно при этом значении k кривая 2 касается оси абсцисс). Кривая 3 на рис. 3 рассчитана при $W = 1$, когда все капиллярные волны устойчивы. При $W > 2$ увеличение поверхностной плотности заряда (параметра W) приводит к расширению диапазона неустойчивых капиллярных волн как в сторону увеличения k , так и в сторону его уменьшения. Растут и величины инкрементов неустойчивых волн. Интересно, что с ростом W увеличивается и волновое число наиболее устойчивой капиллярной волны или, точнее говоря, волны с максимальным значением инкремента. Так, если при $W = 2$ неустойчива лишь волна с $k = 1$, при $W = 3$ максимальный инкремент ($Re \approx 0.43$) имеет волна с $k \approx 1.5$, то при $W = 4$ максимальный инкремент ($Re s \approx 1$) при прочих равных (вышеописанных условиях) имеет волна $k \approx 2$. Это обстоятельство является подтверждением механизма реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости, предложенного в [8].

Сказанное выше свидетельствует о важной роли поверхностного заряда, оказывающего влияние как на структуру спектра волновых движений жидкости, так и на закономер-

ности реализации НТФ, при достаточно большой плотности поверхностного заряда.

Как показывают расчеты (и очевидно из физического смысла), влияние конечности толщины слоя на параметры движений жидкости существенно сказывается, когда она становится сравнимой с длиной волны.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. N 12. С. 9-20.
- [2] Grigor'ev A.I., Munchev M.I., Shiryayeva S.O. // Journal of Colloid and Interface Science. 1994. V. 166. P. 267-274.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3-22.
- [4] He J., Miskovsky N.M. et al. // J. Appl. Phys. 15 August, 1990. V. 68. N 4. С. 1475-1482.
- [5] Neron de Surgy G. et al. // J. Phys. II France. August, 1993. V. 3. N 8. P. 1201-1225.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 661 с.
- [7] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [8] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 9. С. 12-21.

Поступило в Редакцию
14 марта 1996 г.
