07

О МОДИФИКАЦИИ ПРИНЦИПА ГЮЙГЕНСА–ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

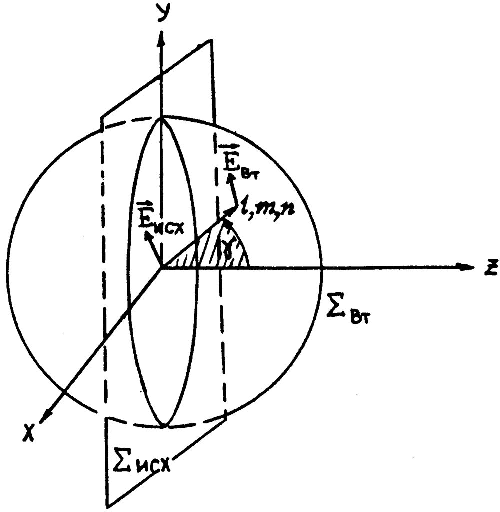
© *Ш.Д.Какичашвили*

Теория дифракции Кирхгофа подвергалась многим критическим замечаниям [1–5]. В приближении $\varkappa r \gg 1$ дифракционный интеграл Кирхгофа правильно описывает свободно распространяющуюся безграничную волну, однако при использовании точного его вида такая адекватность оказывается недостижимой. По-видимому, это свидетельствует о принципиальных ограничениях применимости теоремы Грина в данном случае. Существенные расхождения с реальностью имеют место также при сколь-либо значительных углах дифракции. Следует отметить, что в теории Кирхгофа принцип Гюйгенса–Френеля как эвристический прием нахождения дифрагированного поля в результате суммирования вторичных волн фактически не используется. Согласно Зоммерфельду, здесь «... сферическая волна играет роль вспомогательной математической величины, своего рода "зонда", которым мы исследуем оптическое поле» [6].

Векторная модификация интеграла Кирхгофа для так называемого черного экрана наиболее последовательно была проведена Коттлером [7]. В работе [8] была получена сходная форма на основе векторной модификации принципа Гюйгенса–Френеля и использования векторно-матричного аппарата Джонса [9] для задач голографии [10,11]. В этих работах трудности теории Кирхгофа также не удается обойти.

В предлагаемой работе рассмотрен векторный дифракционный интеграл, полученный на основе поляризационной модификации принципа Гюйгенса–Френеля и скалярного дифракционного интеграла Френеля. Кроме того, в соответствии с расширенной трактовкой принципа Гюйгенса–Френеля, суммирование вторичных волн проводится не только на фронте поступающей волны, но и в определенном объеме вблизи дифрагирующего объекта.

Для упрощения дальнейшего рассмотрения в качестве просвечивающей объект волны используем плоскую поляризованную волну распространяющуюся вдоль оси z. В этих условиях векторную модификацию дифракционного



интеграла Френеля запишем в виде

$$qE(x,y,z,t) = k\iiint\limits_{S_0} \frac{\exp -i\varkappa r}{r} \mathrm{RPM}\mathbf{E}_0 \exp i(\omega t - \varkappa z_0) dx_0 dy_0 dz_0, \tag{1}$$

где $\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$; $k = \frac{4}{3\pi}$; x_0, y_0, z_0 — координаты точки дифрагирующего объекта; x, y, z — координаты точки наблюдения; $l = \frac{x-x_0}{r}$, $m = \frac{y-y_0}{r}$, $n = = \frac{z-z_0}{r}$ — направляющие косинусы дифрагированного луча; $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$; $\mathbf{E}(x,y,z)$ — вектор Джонса дифрагированной волны; $\mathbf{E}_0(x_0,y_0,z_0)$ — вектор Джонса просвечивающей волны; $\mathrm{M}(x_0,y_0,z_0)$ — матрица Джонса дифрагирующего объекта; $\mathrm{R}(l,m,n)$ и $\mathrm{P}(l,m,n)$ — соответственно так называемые матрицы поворота и проекции, введенные в [8]; интегрирование проводится по области $S_0(x_0,y_0,z_0)$, занятой объектом.

В выражении (1) вторичная волна сферической конфигурации описывается аналогично волне, формируемой при рэлеевском рассеянии поляризованного луча на изотропной частичке исчезающе малого диаметра. В этих условиях вектор Джонса луча вторичной волны в направлении l, m, n представляется как результат умножения вектора Джонса луча исходной волны на некоммутативное произведение двух матриц RP, где P формирует проекцию вектора Джонса исходной волны на плоскость, ортогональную направлению l, m, n, а R описывает отклонение луча исходной волны с сохранением его поляризации в отклоненной системе координат. На рисунке изображена волновая поверхность $\sum_{\text{исх}}$ исходной волны, элементарный участок которой на оси z является источником вторичной сферической волны $\sum_{\text{Вт}}$. Конкретный вид R можно получить, рассмотрев вращение системы координат на угол γ ($\cos\gamma = n$) вокруг оси, перпендикулярной плоскости, содержащей лучи исходной и вторичной волн, совместно с условием сохранения поляризации при вращении [12]. Получение вида P элементарно.

Имеем

$$RP = \begin{pmatrix} n + (1-n)\left(1 - \frac{l^2}{1-n^2}\right) & -\frac{(1-n)}{(1-n^2)}lm & l \\ -\frac{(1-n)}{(1-n^2)}lm & n + (1-n)\left(1 - \frac{m^2}{1-n^2}\right) & m \\ -l & -m & n \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sqrt{1-l^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-m^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-n^2} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Из самых общих соображений следует, что амплитуды вторичной и исходной волн должны быть энергетически согласованы. При этом, суммарное поле вторичной волны по всем направлениям должно равняться полю исходной волны: $\iiint \mathbf{E}_{\text{Вт}} dl\, dm\, dn = \mathbf{E}_{\text{исх}}$.. После интегрирования левой части этого уравнения по всем направлениям получим $\frac{3\pi}{4}\mathbf{E}_{\text{исх}}$. Для тождественного равенства этого уравнения в (1) введен численный коэффициент k, чем и достигается полное согласование амплитуд вторичной и исходной волн. В этих условиях совместное действие обеих матриц однозначно описывает простейшие эксперименты по преобразованию состояния поляризации и амплитуды поляризованного света при его отклонении и когерентном рассеянии на произвольные углы [1].

В качестве иллюстрации справедливости (1) рассмотрим случай свободно распространяющейся безграничной волны в отсутствие дифрагирующего объекта. Для этого предварительно проинтегрируем (1) только по области Z_0. Для достаточно удаленных точек наблюдения ($z \gg z_0$) в трехкратном интеграле можно пренебречь зависимостью от z_0 всех членов, кроме $\exp -i\varkappa z_0$. Тогда приближенно имеем

$$k \int\limits_{z_0} \exp -i\varkappa z_0 dz_0 \approx \frac{ik}{\varkappa} \exp -i\varkappa z_0 \left(\exp -i\varkappa\hat{a} - \exp i\varkappa\hat{a}\right), \qquad (3)$$

где область интегрирования заключена в пределах $\bar{z}_0 - \hat{a} \leqslant \leqslant z_0 \leqslant \bar{z}_0 + \hat{a}$ и для общности рассмотрения $\hat{a} = a' + ia''$ берется комплексным.

Для решения (1) воспользуемся методом стационарной фазы, выбрав критические точки $x_0 = x$, $y_0 = y$ [1]. Учтя (3), асимптотическое приближение (1) запишется в виде

$$\mathbf{E}_{X_0, T_0 \to \infty} = -\frac{2\pi}{\varkappa^2} k \Big(\exp -i\varkappa a' \cdot \exp \varkappa a'' - \exp i\varkappa a' \cdot \exp -\varkappa a'' \Big) \times$$
$$\times \mathbf{E}_0 \exp pi(\omega t - \varkappa z). \qquad (1')$$

Из (1') следует, что для адекватного описания свободно распространяющейся поляризованной плоской волны коэффициент перед $\mathbf{E}_0$ следует приравнять единице. Это условие, в свою очередь, позволяет определить значение $\hat{a}$. Решая соответствующее комплексное уравнение, получим

$$\hat{a} = \frac{n\pi}{\varkappa} + i \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\varkappa} \cdot \ln \left[\frac{\varkappa^2}{4\pi k} + \sqrt{\left(\frac{\varkappa^2}{4\pi k} \right)^2 + 1} \right]_{(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)} \qquad (4)$$

Проведенное рассмотрение (выражения (1'), (2)), по нашему мнению, доказывает также справедливость расширенной трактовки принципа Гюйгенса–Френеля, когда происходит суммирование вторичных волн, формируемых не только на фронте поступающей волны, но и в определенном объеме на пути ее следования.

Следует подчеркнуть, что выражение (1) предполагается совершенно точным и не содержит приближений. Разумеется, возможно образование приближенных форм, необходимость которых будет диктоваться конкретными задачами дифракции (параксиальное приближение, френелевское приближение и др.). Нам представляется, что в предложенной форме дифракционного интеграла потенциально содержатся также возможности так называемого метода геометрической теории дифракции [13].

В дальнейшем необходимо сравнение (1) с экспериментальными результатами при больших углах дифракции, а также с полем дифрагирующих объектов анизотропного и гиротропного характера. Существенно важно также доказать согласование с уравнениями Максвелла в общем случае.

Автор благодарит Г. Кинтерая и Г. Тевзадзе за поддержку данной работы.

Список литературы

[1] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1979. 855 с.
[2] *Baker B.B., Copson E.T.* The Mathematical Theory of Huygens Principle. Oxford: Clarendon Press, 1950.
[3] *Silver S.* // J. Opt. Soc. Amer. 1962. V. 52. P. 131–138.
[4] *Poincare H.* // Acta math. 1892. V. 16. P. 297–339.
[5] *Rubinowicz* // Ann. Phys. 1926. Bd. 81. S. 140–154.
[6] *Зоммерфельд А.* Оптика. М.: ИЛ, 1953. 486 с.
[7] *Kottler F.* Electromagnetic Theory. Progress in Optics. Amsterdam, 1967. V. VI. P. 333–377.
[8] *Какичашвили Ш.Д.* Поляризационная голография. Л.: Наука, 1989. 142 с.
[9] *Jones R.C.* // J. Opt. Soc. Amer. 1941. V. 31. P. 488–493.
[10] *Gabor D.* // Nature. 1948. V. 161. P. 777–778.
[11] *Денисюк Ю.Н.* // ДАН СССР. 1962. Т. 144. № 6. С. 1275–1278.
[12] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 720 с.
[13] *Боровиков В.А., Кинбер Б.Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.

Поступило в Редакцию
28 июля 1995 г.