Письма в ЖТФ, том 22, вып. 4 26 февраля 1996 г.

01;03

О СПЕКТРЕ КАПИЛЛЯРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ КАПЛЕ

© *С.О.Ширяева*

Экспериментальному и теоретическому исследованию капиллярных колебаний заряженной капли вязкой жидкости и ее устойчивости по отношению к собственному заряду посвящено множество публикаций [1] в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике, химической технологии. Тем не менее некоторые вопросы, связанные с этой проблемой, до сих пор изучены недостаточно полно. Это относится и к физическому механизму развития неустойчивости сильно заряженной капли. Еще в [2] было показано, что из бесконечного набора мод капиллярных колебаний сильно заряженной капли первой претерпевает неустойчивость основная мода, пропорциональная полиному Лежандра $P_2(\cos\theta)$. Увеличение амплитуды основной моды соответствует появлению сфероидальной деформации капли [3]. Естественно, возникают вопросы: как сфероидальная деформация первоначально сферической капли сказывается на спектре реализующихся колебаний, на декрементах их затухания; как на эти физические характеристики влияет вязкость жидкости. Знание ответов на эти вопросы позволит построить физически корректный механизм развития неустойчивости заряженной капли.

1. Будем решать задачу о капиллярных колебаниях заряженной вытянутой сфероидальной капли вязкой идеально проводящей жидкости, полагая, что сфероидальность формы капли вызвана возбуждением основной моды колебаний капли, на фоне которой развиваются более "быстрые" неустойчивости высоких мод. Рассмотрение проведем в безразмерных переменных, положив радиус исходной сферической формы капли R, плотность ρ и коэффициент поверхностного натяжения σ, равными единице: $R = 1, \rho = 1, \sigma = 1$.

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla p(\mathbf{U}, t) + \nu \Delta U; \tag{1}$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0; \tag{2}$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \qquad \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F(\mathbf{r}, t) = 0; \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla)\mathbf{U} = 0; \qquad (4)$$

$$-p(\mathbf{U}, t) + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{U} - p_E(\xi) + p_\sigma(\xi) = 0; \qquad (5)$$

где

$$r(\theta) = \frac{(1 - e^2)^{1/6}}{(1 - e^2 \cos^2 \theta)^{1/2}} \approx 1 + e^2 h(\theta); h(\theta) = \frac{1}{6}\left(3\cos^2\theta - 1\right);$$

$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - \left[1 + e^2 h(\theta) + \xi(\theta, t)\right] = 0$ — уравнение возмущенной капиллярным волновым движением поверхности вытянутого сфероида в сферических координатах; e — эксцентриситет сфероида; $\xi(\theta, t)$ — осесимметричное возмущение сфероидальной поверхности капли, вызванное капиллярным волновым движением в ней; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – вектора нормали и касательной к поверхности капли; $p_E(\xi)$ и $p_\sigma(\xi)$ — добавки к давлению электрического поля и давлению сил поверхностного нятяжения, происходящие из-за возмущения сфероидальной поверхности, имеющие первый порядок малости по ξ. Зависимость поля скоростей движений жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, поля давлений $p(\mathbf{U}, t)$ и возмущения $\xi(\theta, t)$ от времени примем экспоненциальной: $\sim \exp(at)$.

2. Как отмечалось в [4–6], в общем случае движение жидкости в капле может быть разложено на три компоненты: потенциальную и две вихревых — полоидальную и тороидальную. В использованном при решении данной задачи линейном приближении по малым величинам e^2, $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\xi(\theta, t)$ тороидальные движения жидкости не оказывают влияния на формирование рельефа поверхности капли и не взаимодействуют со связанными между собой через граничные условия полоидальными и потенциальными компонентами движения. Взаимодействие всех трех движений с образованием единого тороидально-полоидального вихря реализуется лишь на нелинейной стадии.

3. Решая задачу (1)–(5) методом скаляризации [6], в пренебрежении взаимодействием различных мод капиллярных колебаний капли можно получить в линейном по e^2 приближении два дисперсионных уравнения:

— для потенциально-полоидальных движений жидкости:

$$s\left[s^2 + n(n-1)(n+2)\alpha_n\right] + 2\nu\left[s^2(n-1)(2n+1) - \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right) \times\right.$$

$$\left.\times\left(s^2 + n(n-1)(n+2)\alpha_n\right)\right] - 4\nu^2 n(n-1)(n+2) s\sqrt{\frac{s}{\nu}} f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right) +$$

$$+e^2\varkappa_n\left\{s\left[\left(s^2+n(n-1)(n+2)\alpha_n\right)\left(2(n-1)+\sqrt{\frac{s}{\nu}}f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)\right)-\right.\right.$$

$$\left.-3\left((2n-1)(n+2)\alpha_n+n^3\right)\right]+2\nu\left[s^2\left(2n^3-8n^2+4n-10+\frac{9}{n}\right)+\right.$$

$$+\sqrt{\frac{s}{\nu}}f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)\left(s^2\left(2n^2-n+2+\frac{9}{n(n+1)}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+3\left(2n^2-n+3-\frac{6}{(n+1)}\right)(n+2)\alpha_n+3n^3\right)\right]+$$

$$\left.+4\nu^2 s\sqrt{\frac{s}{\nu}}f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)\left[5n^3+5n^2+2n-\frac{18}{(n+1)}\right]\right\}=0; \qquad (6)$$

— для вихревых тороидальных движений жидкости:

$$\sqrt{\frac{s}{\nu}}f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)+(n+1)+e^2\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{s}{\nu}+\left((n^2+n-3)+\frac{12}{n(n+1)}\right)\right]\varkappa_n-\frac{2}{3}\right\}=0; \qquad (7)$$

$$\varkappa_n\equiv\frac{n(n+1)}{3(2n-1)(2n+3)};\quad \alpha_n\equiv 1-\frac{W}{(n+2)};\quad W\equiv\frac{Q^2}{4\pi};$$

$$f_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)\equiv\frac{i_{n+1}\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}{i_n\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}.$$

Дисперсионные уравнения для движений жидкости в заряженной сферической капле вязкой жидкости [6] получаются из (6)–(7) при $e^2=0$. Предельный переход к идеальной жидкости получается из (6) при $\nu\to 0$. В этом случае выражение для квадрата частоты капиллярных колебаний капли идеальной жидкости s_0^2 в линейном по e^2 приближении принимает вид

$$s_0^2\approx-\left\{n(n-1)(n+2)\alpha_n-e^2\left[n^3+(2n-1)(n+2)\alpha_n\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)}\right\}.$$

Из этого выражения легко получить (полагая $s_0^2=0$) зависимость критических условий неустойчивости различных мод капиллярных волн сильно заряженной капли от e^2.

3. Важным для понимания физического механизма реализации неустойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду представляется знание тенденций изменения при увеличении степени сфероидальной деформации частот капиллярных колебаний, декрементов затухающих мод и инкрементов неустойчивых мод, поскольку качественный механизм реализации неустойчивости, предложенный в [3], основан на идее последовательного возбуждения высоких мод капиллярных колебаний при увеличении амплитуды потерявшей устойчивость основной моды.

Численные расчеты спектра потенциально-полоидальных движений по (6) показывают, что частоты всех мод капиллярных колебаний, инкременты неустойчивости капиллярных движений (при реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду) и декременты затухания всех ветвей слабо уменьшаются с увеличением степени сфероидальной деформации. Полоидальные вихревые движения жидкости являются апериодически затухающими, с декрементами, растущими с увеличением вязкости и номера моды, как и отмечалось ранее в [7].

Уменьшение инкрементов неустойчивости капиллярных колебаний капли при увеличении сфероидальной деформации согласуется с принципом Ле-Шателье. Но поскольку в количественном смысле относительное уменьшение величин инкрементов различных мод не превышает единиц процентов, то и влияние увеличения эксцентриситета капли на физический механизм реализации неустойчивости по отношению к собственному заряду будет слабым на фоне сильного влияния вязкости. Важным для понимания механизма неустойчивости является зависимость критических условий неустойчивости всех мод капиллярных колебаний от величины сфероидальной деформации, снижающихся с увеличением e^2.

Численные расчеты спектра тороидальных вихревых движений по (7) показывают, что движения этого типа являются апериодически затухающими с декрементами, слабо уменьшающимися с увеличением сфероидальной деформации, но быстро растущими при увеличении вязкости жидкости.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН.МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Rayleigh J.W.* // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–186.
[3] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. № 7. С. 1273–1278.
[4] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // ЖВММФ. 1992. Т. 32. № 6. С. 929–938.

[5] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. № 10. С. 12–19.
[6] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э.* и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. // Препринт ИМРАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
[7] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. № 16. С. 17–22.

Ярославский
государственный
университет

Поступило в Редакцию
13 декабря 1995 г.