

СЕДЛО-ФОКУС В МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ СЕРДЦА ЧЕЛОВЕКА

© В.С.Анищенко, Н.Б.Янсон, А.Н.Павлов

Динамический подход к анализу сердца человека как колебательной системы до сих пор не дает уверенного ответа на вопрос о характере его колебаний. Либо это есть регулярный зашумленный осциллятор, либо генератор, работающий в режиме детерминированного хаоса [1-9]. Цель нашей заметки привести ряд результатов, свидетельствующих в пользу второй гипотезы.

Дальнейшее изложение будет основано на предположении, что типичная электрокардиограмма (ЭКГ) сердца человека может быть рассмотрена как реализация $a(t)$ некоторой автономной автоколебательной конечномерной динамической системы (ДС).

Согласно теореме Такенса, мы можем восстановить общий вид аттрактора исходной системы, порождающей ЭКГ $a(t)$, по известной формуле [10]:

$$x_i = \{a_i, a_{i+p}, a_{i+2p}, \dots, a_{i+(n-1)p}\}, \quad (1)$$

где p — задержка времени в единицах шага выборки реализации, а n — размерность вложения, которая должна соотноситься с корреляционной размерностью D_e изучаемого аттрактора следующим образом:

$$n \geq 2D_c + 1. \quad (2)$$

Практика показывает, что такое значение размерности вложения зачастую оказывается завышенным и для правильного вложения данных бывает достаточно фазового пространства меньшей размерности, когда соблюдается условие

$$n \geq [D_c] + 1, \quad (3)$$

где $[]$ обозначает целую часть числа.

Оценим корреляционную размерность аттрактора традиционным способом, построив график зависимости значения корреляционной размерности от величины размерности вложения, изменяя последнюю в пределах от 1 до 10. При

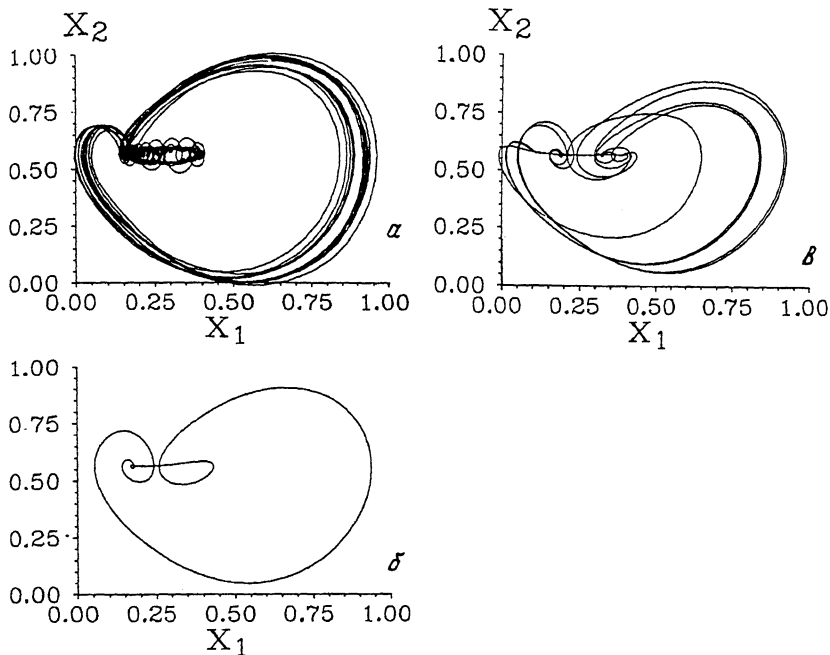


Рис. 1. *a* — проекция фазового портрета, восстановленного по ЭКГ методом последовательного дифференцирования исходной реализации; *b* — проекция предельного цикла в реконструированной динамической системе, *c* — проекция хаотического аттрактора в реконструированной динамической системе.

этом текущее значение корреляционной размерности определяется стандартным методом разбиения фазового пространства на ячейки [11].

Обнаружено, что насыщение значения корреляционной размерности достигается уже при $n = 3$ на уровне ≈ 2.8 , что не противоречит расчетам, выполненным в других работах (см., например, [5]).

Если воспользоваться формулой (2) для оценки достаточной размерности вложения, то окажется, что N должно быть не меньше 7. Но предыдущий опыт восстановления фазовых портретов ДС дает нам право на попытку ограничиться трехмерным фазовым пространством, по крайней мере на первом этапе работы.

Существует несколько способов восстановления фазового портрета системы по реализации, кроме указанного в теореме Такенса (1). Но наиболее часто используемым является метод последовательного дифференцирования исходного временного ряда $a(t)$:

$$x_1 = a, x_2 = da/dt, \dots, x_n = d^{n-1}a/dt^{n-1}. \quad (4)$$

Оба метода показали, что фазовые портреты, восстановленные с их помощью, являются топологически эквивалентными. Остановившись на втором методе восстановления фазового портрета (рис. 1, а), мы применили метод глобальной реконструкции ДС, описанный подробно в [12], и получили систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с аттрактором в виде предельного цикла (рис. 1, б). Данный режим не совпадает с исходным в первую очередь потому, что, как показано многими авторами [1-9], исходный аттрактор ЭКГ обладает характеристиками, присущими непериодическим колебаниям. Однако восстановленный путем глобальной реконструкции аттрактор может рассматриваться как топологически эквивалентный исходному аттрактору ЭКГ, изображенному в течение времени одного сердечного сокращения. При этом форма реализации реконструированного цикла отличается от формы исходной ЭКГ, но в ней присутствуют все характерные P, Q, R, S, T — зубцы [2].

В работе [13] мы провели предварительное исследование полученной нами системы уравнений и обнаружили, что при изменении управляющих параметров модель может демонстрировать хаотическое поведение, что подтверждается вычислением старшего ляпуновского показателя по методу [14] и по алгоритмам, описанным в [15], спектра мощности и автокорреляционной функции для данного режима. При этом хаотический аттрактор (рис. 1, в) визуально напоминает аттрактор исходной ЭКГ (рис. 1, а), и его перечисленные характеристики качественно совпадают с соответствующими характеристиками исходной ЭКГ. Мы построили бифуркационную диаграмму исследуемой системы на плоскости двух выбранных нами управляющих параметров P_1 и P_2 . Ее фрагмент схематически показан на рис. 2, а. Центральная область — это область существования основного предельного цикла (рис. 1, б). Обозначения остальных областей расшифрованы в подписи к рисунку.

Интересно выяснить, каков механизм перехода к хаосу в нашей системе. С этой целью был осуществлен поиск ее неподвижных точек. При значениях параметров, соответствующих основному предельному циклу и хаотическому аттрактору, существует несколько состояний равновесия. Однако только одно из них находится внутри области притяжения интересующих нас аттракторов. Поэтому мы ограничились рассмотрением только данного состояния равновесия. Определение типа его устойчивости показало, что оно является седло-фокусом с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Обнаружив это,

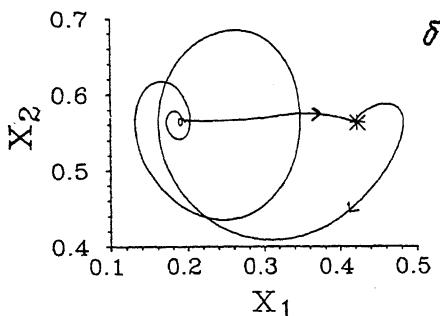
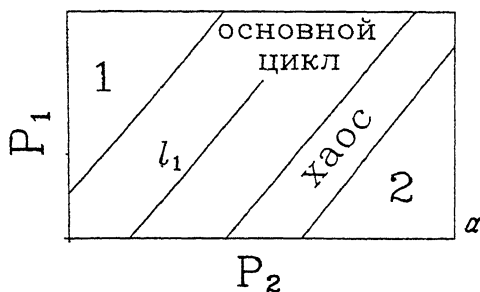


Рис. 2. *а* — фрагмент бифуркационной диаграммы реконструированной динамической системы, где: 1 — область, аттрактором в которой является устойчивый фокус; 2 — область, аттрактором в которой является предельный цикл малого размера, l_1 — линия существования петли сепаратрисы седло-фокуса; *б* — проекция петли сепаратрисы седло-фокуса, обозначенного *.

мы выдвинули гипотезу о том, что в системе может существовать петля сепаратрисы седло-фокуса, разрушение которой и приводит к появлению хаотической динамики.

Данная гипотеза подтвердилась, и мы построили линию существования петли сепаратрисы, показанной на рис. 2, *б*, на бифуркационной диаграмме (рис. 2, *а*). Собственные значения седло-фокуса вдоль этой линии изменялись слабо (в пределах рисунка), и их средние значения оказались следующими: $s_{1,2} \cong 78 \pm i \cdot 92$, $s_3 \cong -45$. Седловая величина петли $\sigma = \text{Res}_{1,2} = s_3 \cong 78 - 45 = 33$, т.е. больше нуля. Петля является опасной и, согласно теореме Шильникова [16–17], при ее разрушении рождается нетривиальное гиперболическое подмножество траекторий, которое при некоторых условиях может стать притягивающим, а значит, возникает странный аттрактор. Действительно, в нашей системе гиперболическое подмножество становится притягивающим при потере устойчивости основным предельным циклом.

Полученные результаты сводятся к следующим:

1. Восстановлена система трех обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой с заданной точностью воспроизводит экспериментальную реализацию ЭКГ.

2. Анализ характеристик модельного аттрактора свидетельствует о режиме динамического хаоса (положительная энтропия Колмогорова–Синая, дробная размерность, сплошной спектр Фурье и спадающая автокорреляционная функция).

3. Установлено, что в модельной системе реализуется особая траектория типа опасной петли сепаратрисы седло-фокуса, что обуславливает существование в системе режима динамического хаоса в соответствии со сценарием Шильникова.

Совокупность приведенных данных является фактором, свидетельствующим в пользу динамической природы аperiodических колебаний ЭКГ, многократно наблюдаемых экспериментально.

Работа частично финансировалась Международным научным фондом, Российским фондом фундаментальных исследований и правительством России (грант RNO 300).

Список литературы

- [1] Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни / М.: Мир, 1991. 248 с.
- [2] Goldberger A. // *News in Physiological Sciences*. 1991. V. 6. P. 87–91.
- [3] Babloyantz A., Desleuxe A. // *Biol. Cybernetic*. 1988. V. 58. P. 203–211.
- [4] Анищенко В.С., Сапарин П.И., Сафонова М.А. // *Радиотехника и электроника*. 1992. Т. 37. С. 467–478.
- [5] Destexhe A., Sepulchre J.A., Babloyantz A. // *Physics Letters A*. 1988. V. 132. N 2/3. P. 101–106.
- [6] Bezerianos A., Bountis T., Parasioannou G., Polydoropoulos P. // *CHAOS*. 1995. V. 5. N 1. P. 95–101.
- [7] Saparin P., Kurths J., Voss A., Zaks M., Anishchenko V. // (submitted to *Phys. Rev. E*).
- [8] Seidel H., Herzel H. In: *Modelling the Dynamics of Biological Systems* // Ed. Erik Mosekilde, Ole G. Mouritsen. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995. P. 205–229.
- [9] Rosenblum M., Kurths J. // *Physica A*. 1995. V. 215. P. 439–450.
- [10] Takens F. In: *Dynamical Systems and Turbulence*. / Ed. D.A. Rang, L.S. Young. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, N.Y., 1980. P. 366–381.
- [11] Farmer J.D. // *Z. Naturforsch.* 1982. V. 37A. N 11. P. 1304–1325.
- [12] Янсон Н.Б., Анищенко В.С. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1966 (в печати).
- [13] Anishchenko V.S., Janson N.B., Pavlov A.N. // (submitted to *CHAOS*).
- [14] Benettin G., Galdani M., Giorgilli A. Strelcun J.-M. // *Meccanica*. 1980. V. 15. P. 9–25.

- [15] *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* // *Physica* 16D. 1985. P. 285-317.
- [16] *Шильников* // Приложение 2. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. М.: Мир, 1980. С. 317-335.
- [17] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.

Саратовский
государственный
университет

Поступило в Редакцию
1 декабря 1995 г.

