

01;07;12

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КООРДИНАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ МЕТОДЕ

© Б.Г.Подласкин, Б.А.Лившиц, Е.А.Чекулаев

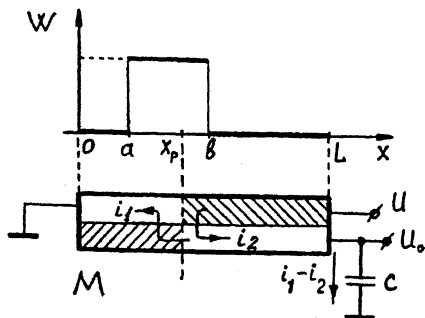
Методы измерения величины заданного параметра в условиях различных шумов разработаны как в фундаментальных [1,2], так и в прикладных работах [3,4]. Наиболее широко в настоящее время исследованы компьютерные методы, алгоритмы которых основаны на статистических моделях [5,6].

С другой стороны, известны фотоприемники, совмещающие в себе функции регистрации оптического излучения и выделения (измерения) информативных признаков изображения [7,8], что дает значительные преимущества в системах технического зрения, работающих в реальном масштабе времени.

В данной работе мы остановимся на статистических свойствах координатных измерений таких пространственных признаков изображений, которые с помощью двух- или многоапертурного синтеза могут быть сведены к медиане изображения, заданного на отрезке $[0, L]$. В этом случае анализ статистических свойств измеряемой оценки медианы становится ключевым вопросом при измерении пространственных признаков изображений такого рода.

Оценим предельные свойства дисперсии медианы при ее измерении в соответствии с процедурой, описанной нами в [9], применительно к многоэлементному фотоприемнику мультискан.

В описанном режиме к резистивному слою мультискана прикладывается напряжение U , а выходным сигналом является потенциал сигнальной шины U_0 , однозначно связанный с координатой x_p границы раздела двух областей прибора с противоположным направлением фототоков (см. рисунок): $x_p = U_0 L / U$. Квант света, попавший на фоточувствительный слой прибора правее x_p , с вероятностью β создает электрон, участвующий в токе i_2 , а квант света, попавший левее x_p , дает приращение в ток i_1 . Так как значение величины β для дальнейшего изложения не существенно, примем $\beta = 1$. Противоположно направленные токи i_1 и i_2 протекают через суммарную емкость сигнальной шины мультискана C ,



Протекание фототоков в фотоприемнике мультискан: W — интенсивность света на единицу длины фотоприемной площадки; M — многоэлементный фотоприемник мультискан.

вызывая изменение потенциала этой шины U_0 на величину

$$\Delta U_0 = \frac{i_2 - i_1}{C} \Delta t$$

и соответствующее смещение x_p на

$$\Delta x_p = \frac{L}{U} \cdot \frac{i_2 - i_1}{C} \Delta t, \quad (1)$$

где Δt — отведенное в эксперименте время наблюдения.

Исследуем процесс перемещения x_p при условии пуассоновского распределения фотонов излучения. Для отдельного фотона перемещение x_p в соответствии с (1) составляет величину $\lambda = qL/UC$, где q — заряд электрона.

Пусть освещенность равномерно распределена на интервале $[a, b] \subset [0, L]$ со средней интенсивностью W фотонов в секунду. Выберем временной интервал Δt настолько малым, что вероятность попадания фотона за это время в промежуток, соизмеримый с λ , была бы пренебрежимо мала. Это условие может быть записано как

$$\frac{\lambda MN}{b-a} \ll 1, \quad (2)$$

где N — число фотонов, $MN = W\Delta t$ — математическое ожидание количества фотонов N за время Δt .

Пусть в момент t_0 имеем $x_p(t_0) \in [a, b]$. Обозначим N_+ число фотонов, упавших за Δt в $[x_p, b]$, N_- — число фотонов,

упавших за Δt в $[a, x_p]$. Тогда $N = N_+ + N_-$. Определим условное математическое ожидание и дисперсию величины $(N_+ - N_-)$ при условии фиксированного значения $x_p(t_0)$:

$$\begin{aligned} M[(N_+ - N_-)|x_p(t)] &= M(N_+|x_p(t_0)) - M(N_-|x_p(t_0)) = \\ &= MN \frac{b - x_p(t_0)}{b - a} - MN \frac{x_p(t_0) - a}{b - a} = 2 \frac{MN}{b - a} \left(\frac{b + a}{2} - x_p(t_0) \right). \end{aligned}$$

Поскольку N_+ и N_- — статистически независимые случайные величины, распределенные по пуассоновскому закону, то

$$\begin{aligned} D[(N_+ - N_-)|x_p(t_0)] &= D(N_+|x_p(t_0)) + D(N_-|x_p(t_0)) = \\ &= M(N_+|x_p(t_0)) + M(N_-|x_p(t_0)) = MN. \end{aligned}$$

Примем следующую модель:

$$x_p(t_0 + \Delta t) = x_p(t_0) + \lambda(N_+ - N_-).$$

Тогда условные математическое ожидание и дисперсия величины $x_p(t_0 + \Delta t)$ при условии, что при t_0 положение x_p фиксировано, можно получить в виде

$$\begin{aligned} M[x_p(t_0 + \Delta t)|x_p(t_0)] &= x_p(t_0) + \lambda M[(N_+ - N_-)|x_p(t_0)] = \\ &= \frac{a + b}{2} + \left(x_p(t_0) - \frac{a + b}{2} \right) \cdot \left(1 - 2\lambda \frac{MN}{b - a} \right), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} M[x_p(t_0 + \Delta t)|x_p(t_0)] - \frac{a + b}{2} &= \\ &= \left(x_p(t_0) - \frac{a + b}{2} \right) \cdot \left(1 - 2\lambda \frac{MN}{b - a} \right) = \\ &= \left(x_p(t_0) - \frac{a + b}{2} \right) \cdot \left(1 - 2\lambda \frac{W\Delta t}{b - a} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$D[x_p(t_0 + \Delta t)|x_p(t_0)] = \lambda^2 D[(N_+ - N_-)|x_p(t_0)] = \lambda^2 MN.$$

Переходя к вычислению безусловных математического ожидания и дисперсии на основании (3) и (4):

$$M[M[x_p(t_0 + \Delta t)|x_p(t_0)]] = Mx_p(t),$$

$$M[D[x_p(t_0 + \Delta t)|x_p(t_0)]] = Dx_p(t),$$

получаем дифференциальное соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(Mx_p(t_0) - \frac{a+b}{2} \right) = \left(Mx_p(t_0) - \frac{a+b}{2} \right) \left(-2\lambda \frac{W}{b-a} \right).$$

Следовательно, безусловное математическое ожидание экспоненциально приближается к координате $(a+b)/2$:

$$Mx_p(t) - \frac{a+b}{2} = \left(Mx_p(t_0) - \frac{a+b}{2} \right) \exp \left[-\frac{2\lambda}{b-a} \cdot W (t-t_0) \right],$$

$$t > t_0.$$

Вычисляем дисперсию Dx_p , считая $x_p(t)$ стационарным процессом в широком смысле. В стационарном процессе $Dx_p = Dx_p(t)$ для любого t . Воспользуемся основным тождеством дисперсионного анализа [10]:

$$Dx_p(t) = D \left[M [x_p(t) | x_p(t - \Delta t)] \right] + M \left[D [x_p(t) | x_p(t - \Delta t)] \right]. \quad (5)$$

Дисперсия условного математического ожидания есть произведение дисперсии $Dx_p(t - \Delta t) = Dx_p$ и квадрата множителя $(1 - 2\lambda MN/(b-a))$ из уравнения (3):

$$D \left[M [x_p(t) | x_p(t - \Delta t)] \right] = Dx_p \cdot \left(1 - 2\lambda \frac{MN}{b-a} \right)^2. \quad (6)$$

Дисперсия $D [x_p(t) | x_p(t - \Delta t)] = \lambda^2 MN$ не зависит от x_p , поэтому

$$M \left[D [x_p(t) | x_p(t - \Delta t)] \right] = \lambda^2 MN. \quad (7)$$

Из (5)–(7) получаем

$$Dx_p = Dx_p \cdot \left(1 - 2\lambda \frac{MN}{b-a} \right)^2 + \lambda^2 MN.$$

Следовательно,

$$Dx_p = \frac{\lambda^2 MN}{1 - \left(1 - 2\lambda \frac{MN}{b-a} \right)^2} = \frac{\lambda(b-a)}{4 \left(1 - \lambda \frac{MN}{b-a} \right)}.$$

Пренебрегая малой по условию (2) величиной $\lambda MN/(b-a)$, получаем $Dx_p = \lambda(b-a)/4$, или среднеквадратичное отклонение $\sqrt{Dx_p} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda(b-a)}$.

Из полученных результатов следует, что при фиксированном параметре λ дисперсия Dx_p не зависит от мощности света, т. е. от скорости падения фотонов $MN/\Delta t$, что на первый взгляд противоречит общепринятым представлениям. Однако реального противоречия здесь нет; легко убедиться, что точно такую же дисперсию имеет медиана, определенная по выборке $\{x_i\}_{i=1}^k$ координат k фотонов, если $k = (b - a)/\lambda$ [11].

Если параметры, определяющие значения λ , постоянны, то дисперсия отсчетов x_p при неподвижном положении светового сигнала не зависит от мощности света. Уменьшения дисперсии измерений можно добиваться уменьшением λ (посредством увеличения емкости C) либо путем вычисления среднего по многим независимым реализациям $x_p(t_1)$, $x_p(t_2), \dots$. При этом независимыми эти реализации можно считать в том случае, когда за время $t_{i+1} - t_i$ регистрируются $\approx k$ фотонов.

Из проведенного анализа видно, что измеряемая величина $x_p(t)$ обладает статистическими характеристиками, сходными с характеристиками выборочной медианы, вычисленной по координатам падения последних k фотонов, где $k = (b - a)/\lambda$. Известно, что медиана является пусть не всегда самой эффективной, но достаточно хорошей оценкой параметра сдвига [2]. Важнейшим же ее преимуществом по сравнению с другими статистиками является ее слабая чувствительность к хвостам вероятностных распределений, т. е. в нашем случае к флуктуациям количества фотонов вдали от x_p . Эта особенность медианы как статистики "дает приличные гарантии против больших ошибок" [2, с. 319] и в более сложных случаях, когда осуществляется обработка сигнала методом многоапертурного синтеза.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код 95-01-00520а.

Список литературы

- [1] Гудмен Дж. Статистическая оптика: М.: Мир, 1988.
- [2] Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991.
- [3] Кассам С.А. // ТИИЭР. 1985. Т. 73. № 3. С. 54-110.
- [4] Прэтт У.К., Фожра О.Д., Гагалович А. // ТИИЭР. 1981. Т. 69. № 5. С. 54-64.
- [5] Террайн Ч.У., Куатьеры Т.Ф., Даджон Д.А. // ТИИЭР. 1986. Т. 74. № 4. С. 4-25.
- [6] 2-я Всероссийская с участием стран СНГ конференция "Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии". РОАИ-2-95, Тез. докл. Ч. 2, 4. Ульяновск, 1995.

- [7] Берковская К.Ф., Кириллова Н.В., Подласкин Б.Г., Столовицкий В.М., Сузанов В.Л., Тучкевич В.В. // ЖТФ. 1983. Т. 53. В. 10. С. 2015–2024.
- [8] Подласкин Б.Г. // ЖТФ.1987. Т. 57. В. 8. С. 1610–1616.
- [9] Берковская К.Ф., Кириллова Н.В., Подласкин Б.Г., Столовицкий В.М., Токранова Н.А. // Научно-технические достижения. М., 1992. С. 22–25.
- [10] Романовский В.И. Математическая статистика. М.-Л.: ГОНТИ, 1938.
- [11] Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966.

Физико-технический институт
им. А.Ф. Иоффе РАН
С.-Петербург

Поступило в Редакцию
29 декабря 1995 г.