Письма в ЖТФ, том 22, вып. 1 12 января 1996 г.

01

ОБ ОДНОМ НЕТРИВАИАЛЬНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МОДЕЛИ РЁССЛЕРА

© *Э.М.Шахвердиев*

Хорошо известно (см., например, [1]), что траектории странного аттрактора могут порождаться очень простыми дифференциальными уравнениями (при надлежещем выборе параметров задачи). Так, например, аттрактор Рёсслера описывается системой трех дифференциальных уравнений, которая содержит лишь одну нелинейность:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z,$$
$$\frac{dy}{dt} = x + ay, \tag{1}$$
$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c),$$

где a, b, c — постоянные параметры.

В настоящем сообщении впервые приведены результаты нестационарного анализа системы (1) в одном предельном случае методом асимптотического разложения решений сингулярно возмущенных систем по малому параметру.

В последнее время этот метод автором активно применяется для нестационарного исследования различных кинетических уравнений (см., например, [2–7] и ссылки, приведенные там).

Как свидетельствуют имеющиеся литературные данные ([1,8,9] и ссылки там), система Рёсслера демонстрирует хаотическое поведение при $a < 1$, $c > 1$, $b > 1$ и $b < 1$. Считая $c^{-1} \ll 1$ малым параметром задачи, используем вышеназванный асимптотический метод. Предварительно для этой цели сделаем замену

$$x = cx_1, \quad y = cy_1, \quad z = c^{-1}z_1. \tag{2}$$

Тогда получаем

$$\frac{dx_1}{dt} = -y_1 - \frac{1}{c^2}z_1,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = x_1 + ay_1, \tag{3}$$

$$c^{-1}\frac{dz_1}{dt} = b + z_1x_1 - z_1.$$

В этом сообщении ограничимся нулевым приближением по малому параметру $\varepsilon = c^{-1}$. Из третьего уравнения системы (3) находим выражение для $z_1(t)$, которое, согласно теории (см. [10]), справедливо при больших временах (так называемая дальняя асимптотика (ДА)):

$$z_1^{ДА}(t) = b(1 - x_1^{ДА}(t))^{-1}. \tag{4}$$

Система уравнений для $x_1^{ДА}(t)$ и $y_1^{ДА}(t)$ легко интегрируема в нулевом приближении (заметим, что малый параметр входит в систему для x_1 и y_1 регулярно в виде ε^2, в отличие от сингулярности для z_1, когда ε находится при производной):

$$x_1^{ДА}(t) = c_1\exp(\lambda_1 t) + c_2\exp(\lambda_2 t), \tag{5}$$

$$y_1^{ДА}(t) = -x_1^{ДА}(t) = -c_1\lambda_1\exp(\lambda_1 t) - c_2\lambda_2\exp(\lambda_2 t),$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения линейной системы для x_1 и y_1:

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0, \tag{6}$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^{1/2};$$

c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий:

$$c_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\left(y_1(0) + x_1(0)\lambda_2\right),$$

$$c_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\left(y_1(0) + x_1(0)\lambda_1\right). \tag{7}$$

В соответствии с теорией сингулярных возмущений [10] для нахождения ближней асимптотики (БА), т. е. при $t \to 0$, в системе (3) следует сделать операцию растяжения времени $\tau = t\varepsilon^{-1} = tc$. Тогда в нулевом приближении

$$x_1^{БА}(\tau) \equiv x_1(0), \quad y_1^{БА}(\tau) \equiv y_1(0),$$

$$z_1^{БА}(\tau = ct) = z_1(0)\exp(-(1 - x_1(0))ct) +$$

$$+ b(1 - x_1(0))^{-1}\Big(1 - \exp(-(1 - x_1(0))ct)\Big). \tag{8}$$

С учетом условия сращивания общее решение (ОР) системы (3) имеет следующий вид:

$$x_1^{\text{ОР}}(t) = x_1^{\text{ДА}}(t) + x_1^{\text{БА}}(\tau) - x_1(0) = x_1^{\text{ДА}}(t),$$
$$y_1^{\text{ОР}}(t) = y_1^{\text{ДА}}(t) + y_1^{\text{БА}}(\tau) - y_1(0) = y_1^{\text{ДА}}(t), \tag{9}$$
$$z_1^{\text{ОР}}(t) = b(1 - x_1^{\text{ДА}}(t))^{-1} + z_1^{\text{БА}}(\tau) - b\,(1 - x_1(0))^{-1}.$$

Согласно

$$x^{\text{ОР}} = cx_1^{\text{ОР}}, \qquad y^{\text{ОР}} = cy_1^{\text{ОР}}, \qquad z^{\text{ОР}} = c^{-1}z_1^{\text{ОР}}. \tag{10}$$

Согласно численным результатам [1,8], хаотичность в поведении системы Рёсслера реализуется, в частности, при $0 < a < 1$. Из (6) видно, что в этом случае корни характеристического уравнения становятся комплексно-сопряженными, и так как $a > 0$, то, скажем, в плоскости (x, y) мы получаем серию (для различных a, b, c) раскручивающихся спиралей. Такие спирали могут порождаться также в плоскостях (x, z) и (y, z) (ср. выражения для $x_1^{\text{ДА}}(t)$, $y_1^{\text{ДА}}(t)$ и $z_1^{\text{ДА}}(t)$). Если мысленно представить себе, что система (1) описывает движение гипотетической частицы, решения (10) соответсвуют движению частицы вдоль спирали в плоскости, скажем, (x, y) и дрейфу в направлении, перпендикулярном плоскости (x, y), т. е. вдоль линии, определяемой z-координатой. Сам дрейф при этом может происходить также вдоль спирали. Как показывает анализ многочисленных кривых, приведенных в [1,8] в пространстве (x, y, z) (эти кривые — результаты численного моделирования исходной системы (1)), движения вдоль раскручивающихся спиралей и линии весьма характерны для модели Рёсслера.

Согласно проведенному асимптотическому анализу, полученные весьма наглядные результаты "содержат" в себе признаки хаотичности поведения траектории аттрактора Рёслера. Это, прежде всего, факт присутствия в асимптотических выражениях экспоненциальных членов с положительным показателем (критерий хаотического поведения, который основывается на концентрации показателей Ляпунова).

Согласно [8], переход к хаосу может реализоваться также через последовательность удвоений периода движения (критерий Фейгенбаума). Для основной гармоники асимптотическая оценка периода $T \sim \omega^{-1} \sim (1 - \frac{a^2}{4})^{-1/2} \sim 1$ удовлетворительно согласуется с результатами численного расчета при $0.3 < a < 0.5$ [8]. Кроме этого, как легко заметить из выражения для $z(t)$, поведение системы (1) весьма чувствительно к начальным значениям. В частности, поведение $z(t)$ критически зависит от знака $x_1(0) - 1$. Известно, что с возникновением и развитием концепции хаоса стало ясно, что довольно простые системы дифференциальных уравнений обладают поразительным свойством демонстрировать существенно непредсказуемое поведение. Разумеется, можно предсказать будущее такой системы, если известны точные начальные условия, однако любая неточность в их задании так быстро возрастает, что практически никакой предсказуемости нет [11].

Конечно, полученные нами асимптотические оценки ни в коей мере не могут претендовать на описание непредсказуемых переходов из одной области пространства в другую или наоборот. Весьма надежным способом исследования таких непредсказуемостей, конечно же, является численное моделирование системы. Кроме этого, при изучении таких особенностей немаловажное место занимает применение результатов теории стохастических дифференциальных уравнений [11].

Список литературы

[1] *Хакен Г.* Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 419 с.
[2] *Шахвердиев Э.М.* // ФТТ. 1992. Т. 34. № 2. С. 603–610.
[3] *Шахвердиев Э.М.* // ФТТ. 1993. Т. 35. № 3. С. 833–843.
[4] *Шахвердиев Э.М.* // Изв. вузов. Физика. 1994. Т. 36. № 12. С. 24–26.
[5] *Шахвердиев Э.М.* // ФТТ. 1994. Т. 36. № 1. С. 25–35.
[6] *Shahverdiev E.M.* // Physica B. 1993. V. 192. P. 274–278.
[7] *Shahverdiev E.M.* // Physica B. 1994. V. 193. P. 177–178.
[8] *Letellier C., Dutertre P., Maheu B.* // Chaos. 1995. V. 5. N 1. P. 271–282.
[9] *Ding M., Ott E.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. N 2. P. 945–948.
[10] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решения сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 272 с.
[11] *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 526 с.

Институт физики
АН Азербайджана
Баку

Поступило в Редакцию
9 августа 1995 г.