

Динамика взаимодействующих кубитов в сильном переменном электромагнитном поле

© М.В. Денисенко¹, А.М. Сатанин¹, S. Ashhab², F. Nori²

¹ Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

² Advanced Science Institute, The Institute of Physical and Chemical Research (RIKEN), Saitama, Japan

E-mail: sarkady@mail.ru

Исследованы зависимости населенностей энергетических уровней взаимодействующих кубитов от амплитуды поля и контролирующих параметров при фиксированной частоте внешнего электромагнитного поля. Обнаружено, что константа связи кубитов существенно влияет на квантово-когерентные переходы Ландау–Зинера между состояниями кубитов и формирование интерференционной картины населенностей уровней в зависимости от параметров поля. Показано, что метод интерферометрии Ландау–Зинера позволяет определить константу связи кубитов.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП РНП 2.1.1/3778, 2.1.1/2686 и Фонда „Династия“.

1. Введение

В последнее время большой интерес вызывает метод амплитудной спектроскопии [1–3], в основе которого лежит методика получения информации о спектре системы путем „развертки“ функции отклика по амплитуде сигнала. При этом частота переменного поля может быть на несколько порядков меньше, чем расстояние между уровнями. Метод амплитудной спектроскопии позволяет определить важные характеристики сверхпроводниковых джозефсоновских кубитов [1–3], которые являются наиболее перспективными кандидатами на роль квантовых логических элементов.

В недавних работах были изучены переходы Ландау–Зинера [4,5] (см. обзор [6]) и многофотонные процессы в случае единичных кубитов [6,7]. В настоящей работе исследовано влияние на переходы Ландау–Зинера эффектов взаимодействия кубитов, вызванных квазипересечением уровней кубитов во внешних периодических полях. Для исследования переходов Ландау–Зинера использован квазиэнергетический подход, основанный на теореме Флоке [8–10]. Метод квазиэнергии позволяет понять роль промежуточных состояний в формировании резонансов населенностей уровней кубитов. Разработанный в настоящей работе метод определения квазиэнергетических состояний удобен при вычислении вероятностей переходов Ландау–Зинера и построении интерференционной картины для населенностей как функций параметров поля. Принципиальное отличие нашего подхода от работ, посвященных лазерному воздействию на многоуровневые атомные системы, состоит в том, что мы рассматриваем поведение системы при фиксированной частоте внешнего поля, интересуясь в данном случае вероятностями возбуждения в зависимости от амплитуды приложенного поля и управляющего параметра, определяющего расстояние между уровнями.

2. Квазиэнергетическое описание состояний взаимодействующих кубитов

Основные черты поведения системы связанных кубитов описываются гамильтонианом [11,12]

$$H = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_1 + \epsilon_2 + J & \Delta_2 & \Delta_1 & 0 \\ \Delta_2 & \epsilon_1 - \epsilon_2 - J & 0 & \Delta_1 \\ \Delta_1 & 0 & -\epsilon_1 + \epsilon_2 - J & \Delta_2 \\ 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & -(\epsilon_1 + \epsilon_2) + J \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где ϵ_i — энергия смещения i -го кубита, Δ_i — туннельные константы ($i = 1, 2$), J — энергия связи кубитов. Параметры ϵ_i и Δ_i определяют спектр несвязанных кубитов ($J = 0$): $E_i = \pm 0.5\sqrt{\epsilon_i^2 + \Delta_i^2}$. Ферромагнитное и антиферромагнитное взаимодействие кубитов характеризуется величиной $\pm|J|$. Энергия $\epsilon_i = \epsilon_0^i(f_i - 1/2)$ выражается через относительный магнитный поток $f_i = \Phi_{xi}/\Phi_0$, где Φ_{xi} — магнитный поток, пронизывающий i -й контур, $\Phi_0 = h/2e$ — квант магнитного потока. В случае двух идентичных кубитов ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$) симметрия синглетного и триплетного подпространств определена, что позволяет привести гамильтониан к синглет-триплетному представлению. При этом волновая функция синглетного состояния может рассматриваться независимо, поэтому для изучения динамики можно ограничиться матрицей меньшей размерности

$$H = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\epsilon + J & \sqrt{2}\Delta & 0 \\ \sqrt{2}\Delta & -J & \sqrt{2}\Delta \\ 0 & \sqrt{2}\Delta & -2\epsilon + J \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Решая стационарное уравнение Шредингера $\hat{H}|j\rangle = E_j|j\rangle$, где $j = 1, \dots, 4$, нетрудно найти энергетический спектр системы с гамильтонианом (1) [12], пред-

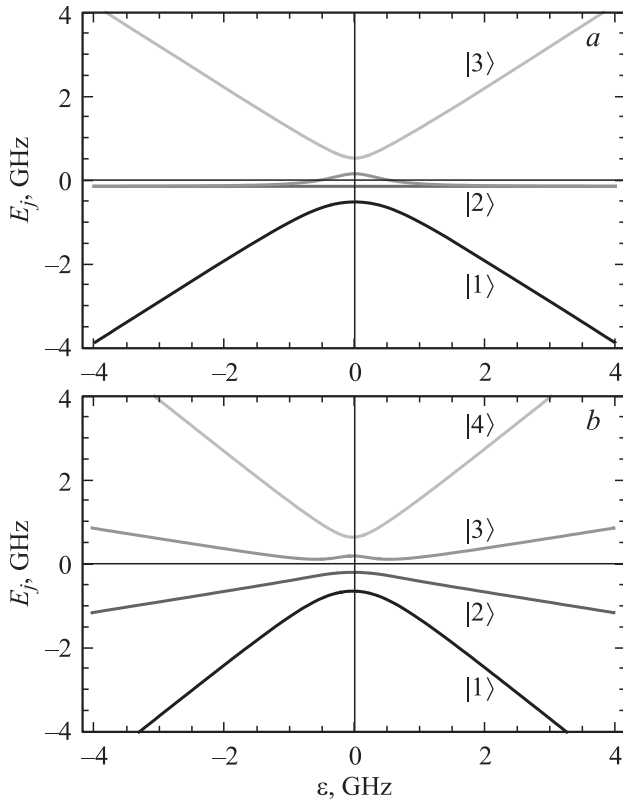


Рис. 1. Зависимость собственных энергий системы от параметра ϵ для двух идентичных (а) и следа различающихся (б) кубитов. а — $\Delta = 0.5$ GHz, $J = -0.3$ GHz, б — $\Delta_1 = 0.5$ GHz, $\Delta_2 = 0.75$ GHz, $\epsilon_2 = 1.5\epsilon_1$, $J = -0.3$ GHz.

ставленный на рис. 1. Отметим, что все величины, имеющие размерность энергии, в работе будут измеряться в GHz (мы выбираем систему единиц, в которой постоянная Планка $\hbar = 1$).

Рассмотрим частный случай, когда управляющие параметры $\epsilon_{1,2}$ зависят от времени согласно

$$\begin{aligned} \epsilon_1(t) &= \epsilon_0^1 + A \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \epsilon_2(t) &= \epsilon_0^2 + A \cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагается, что кубиты помещены в однородное переменное магнитное поле, а магнитные потоки, вызывающие смещение уровней кубитов ϵ_0^1 и ϵ_0^2 , пропорциональны друг другу. Когда амплитуда поля мала, а частота внешнего поля близка к расстоянию между уровнями, можно использовать резонансное приближение, которое позволяет ввести не зависящий от времени эффективный гамильтониан, описывающий медленное движение. В случае одного кубита в переменном поле аналитический расчет [7] в данном приближении показал, что захват и „нутация“ населенностей происходят на частоте Раби $\Omega = \Delta |J_n(A/\omega)|$, где $J_n(x)$ — функция Бесселя. Аналогичным методом можно получить для связанных кубитов резонансные условия $\epsilon_0^1 \pm J + n\omega \approx 0$, $\epsilon_0^2 \pm J + n\omega \approx 0$. В случае симметричных кубитов ($\epsilon_0^1 = \epsilon_0^2 = \epsilon$) внешнее воздействие имеет

вид $\epsilon(t) = \epsilon + A \cos(\omega t + \varphi_0)$, а условие резонанса выполняется при $\epsilon \pm J + n\omega \approx 0$.

Видно, что данные условия зависят от параметра взаимодействия J . Далее показано, что это приводит к появлению дополнительных пиков в интерференционной картине для вероятностей переходов. Следует отметить, что полученные условия справедливы в резонансном приближении и не могут описывать динамику системы при произвольной амплитуде. Чтобы выйти за рамки данного приближения, обратимся к численному решению уравнения Шредингера. Для определения промежуточных состояний удобно использовать квазиэнергетический подход, который позволяет получить точные состояния гамильтониана, периодически зависящего от времени.

Произвольный периодический гамильтониан

$$\hat{H}(t) = \hat{H}(t + T) \quad (4)$$

коммутирует с оператором трансляции по времени. Поэтому собственные функции (4) — функции Флоке [8] — обладают свойством

$$|\Psi_k(t)\rangle = |\Phi_k(t)\rangle e^{-iq_k t},$$

$$|\Phi_k(t + T)\rangle = |\Phi_k(t)\rangle, \quad (5)$$

где $|\Phi_k(t)\rangle$ являются решением уравнения

$$\left(\hat{H}(t) - i \frac{\partial}{\partial t} \right) |\Phi_k(t)\rangle = q_k |\Phi_k(t)\rangle, \quad (6)$$

а действительные параметры q_k называются квазиэнергиями [8–10] (k — квантовое число, определяющее квазиэнергию). Параметры q_k находятся из решения уравнения

$$\hat{U}(T) |\Phi_k(0)\rangle = e^{-iq_k T} |\Phi_k(0)\rangle, \quad (7)$$

где $\hat{U}(T) = \hat{P} \exp\left(-i \int_0^T \hat{H}(t) dt\right)$, \hat{P} — оператор хронологического упорядочения. Проецируя функции $|\Phi_k(t)\rangle$, которые являются решениями уравнения (6), на базисные состояния системы, получим вероятность перехода между стационарными уровнями системы без внешнего поля ($A = 0$). С учетом усреднения по начальной фазе φ_0 [9] сигналов (3) вероятность перехода равна

$$P(t)_{i \rightarrow j} = \sum_k |\langle j | \Phi_k(t) \rangle|^2 |\langle \Phi_k(t) | i \rangle|^2, \quad (8)$$

где i и j — номера стационарных уровней невозмущенного гамильтониана системы.

Вероятность перехода (8) периодична; она может быть разложена по гармоникам и усреднена по периоду

переменного поля (см. [9]):

$$\bar{P}_{i \rightarrow j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{i \rightarrow j}^{(n)}, \quad P_{i \rightarrow j}^{(n)} = \sum_k |\langle \alpha_j | \Phi_k^{(n)} \rangle \langle \Phi_k^{(n)} | \alpha_i \rangle|^2,$$

$$|\Phi_k^{(n)}\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega t} |\Phi_k(t)\rangle dt, \quad (9)$$

где $|\Phi_k^{(n)}\rangle$ — Фурье-компонента квазиэнергетической функции.

Отметим, что при вычислении вероятностей по формуле (9) усреднение сигналов по начальной фазе φ_0 соответствует учету в эксперименте флуктуации моментов прихода импульсов поля, а усреднение по периоду поля соответствует учету флуктуации длительности импульсов, которые считаются определенными с точностью до периода поля [9].

3. Переходы Ландау–Зинера и амплитудная спектроскопия в системе двух взаимодействующих кубитов

В данном разделе представлены результаты численного моделирования динамики поведения двух связанных

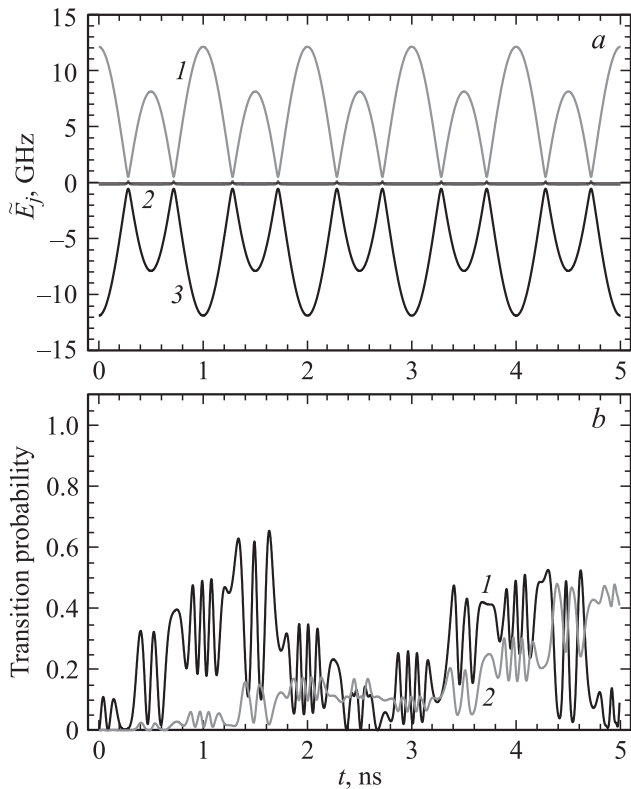


Рис. 2. *a)* Изменение во времени мгновенных значений энергий $\tilde{E}_j(t)$. 1 — высоколежащий уровень, 2 — промежуточный, 3 — низколежащий. *b)* Вероятности переходов: 1 — $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, 2 — $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$. Параметры системы: $\Delta = 0.5$ GHz, $A = 10$ GHz, $\omega = 1$ GHz, $\epsilon = 2$ GHz, $J = -0.3$ GHz.

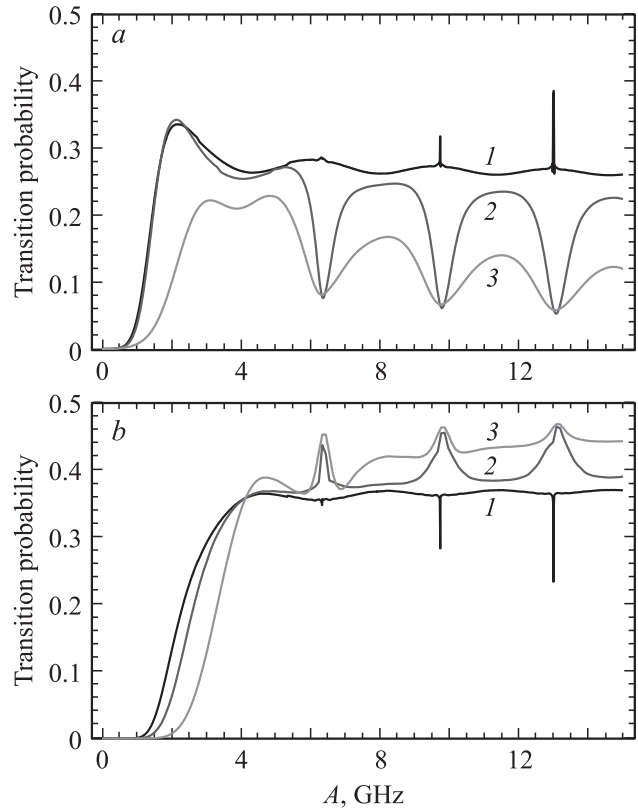


Рис. 3. Зависимости вероятностей переходов $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ (*a*) и $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ (*b*) от амплитуды внешнего поля при значениях константы связи $J = 0$ (1), -0.1 (2) и -0.3 GHz (3). Параметры системы: $\Delta = 0.5$ GHz, $\omega = 1$ GHz, $\epsilon = 3$ GHz.

кубитов на примере симметричного случая. При расчетах населенностей была учтена 61 гармоника (n в разложении (9) изменяется в интервале $-30 \leq n \leq 30$), что является достаточным для определения вероятностей переходов с точностью до 0.01%.

Прежде всего изучим динамику связанных кубитов в переменном поле. В сильном поле, так же как в случае двухуровневой системы [7], можно ввести адиабатические состояния, подчиняющиеся уравнению

$$\hat{H}(t)|\phi_j(t)\rangle = \tilde{E}_j(t)|\phi_j(t)\rangle. \quad (10)$$

Рис. 2, *a* показывает временную зависимость мгновенных собственных значений $\tilde{E}_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) гамильтониана системы симметричных кубитов (2). Пусть система в начальный момент находилась на нижнем уровне $|1\rangle$ (рис. 1, *a*). Как видно из рис. 2, *a*, в моменты, когда амплитуда поля велика, она определяет быстрые осцилляции населенностей. В моменты времени $t_m = 2\pi m/\omega$, когда происходит сближение уровней $\tilde{E}_j(t)$, между ними становятся возможны переходы Ландау–Зинера. Как показано на рис. 2, *b*, амплитуды быстро осциллируют вокруг среднего значения, испытывая резкие перебои между состояниями нелинейного резонанса в те моменты времени, когда $\tilde{E}_j(t)$ максимально сближаются.

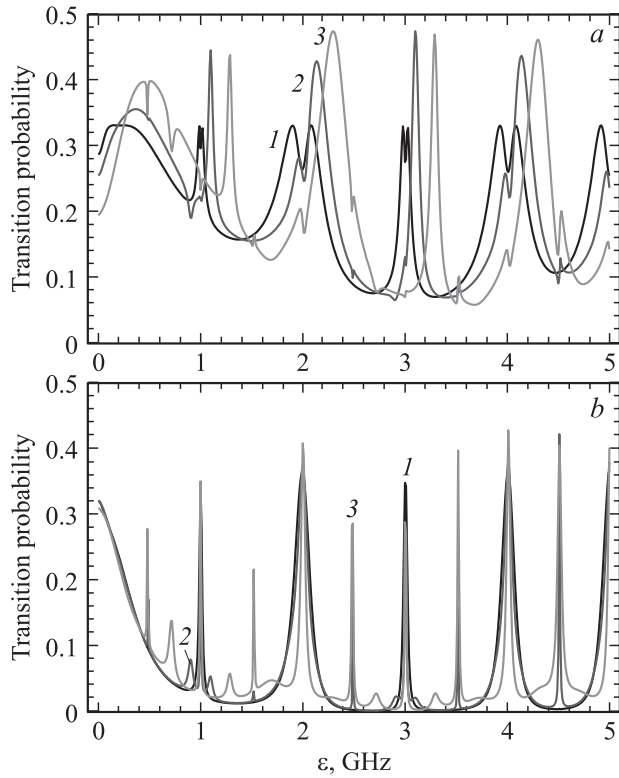


Рис. 4. Зависимости вероятностей переходов $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ (a) и $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ (b) от параметра системы кубитов ϵ при значениях константы связи $J = 0$ (1), -0.1 (2) и -0.3 GHz (3). Параметры систем: $\Delta = 0.5$ GHz, $\omega = 1$ GHz, $A = 10$ GHz.

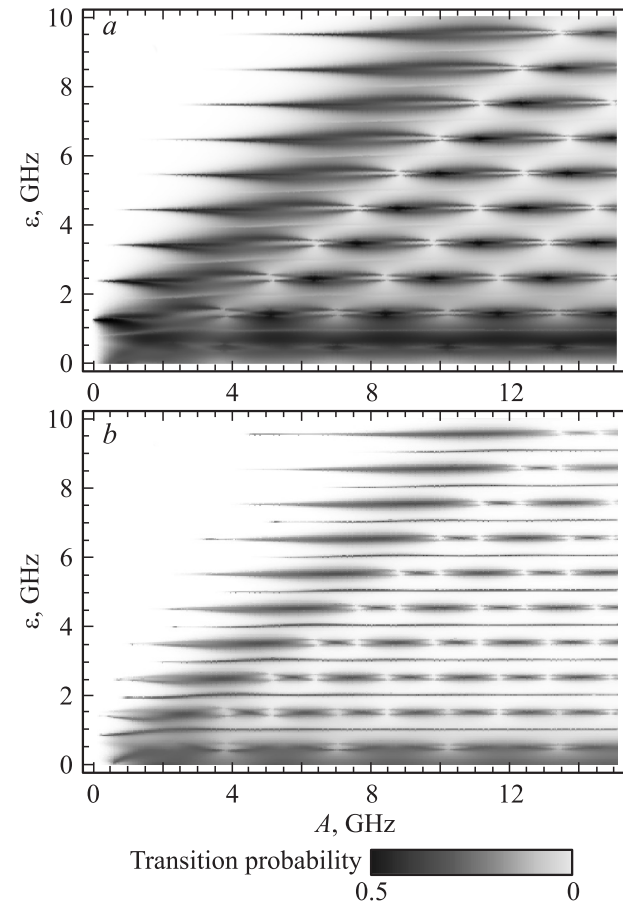


Рис. 6. Интерференционная картина вероятностей переходов $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ (a) и $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ (b) в зависимости от амплитуды внешнего поля A и управляющего параметра системы кубитов ϵ . Параметры системы: $\Delta = 0.5$ GHz, $\omega = 1$ GHz, $J = -0.5$ GHz.

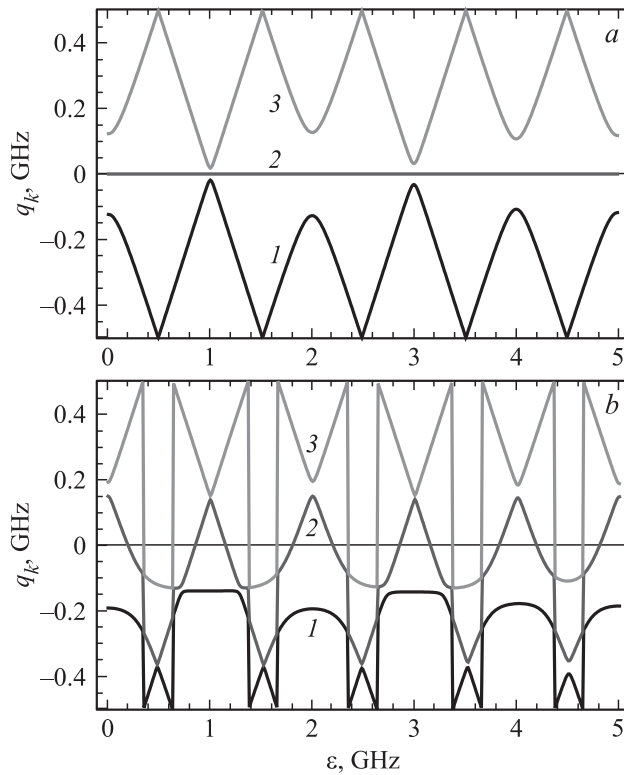


Рис. 5. Зависимость квазиэнергий q_k ($k = 1, 2, 3$) от управляющего параметра системы симметричных кубитов ϵ . $J = 0$ (a) и -0.3 GHz (b). Параметры системы те же, что на рис. 4.

На рис. 3 представлены зависимости населенностей возбужденных уровней от амплитуды переменного поля. Качественно эти зависимости могут быть поняты в рамках резонансного приближения. Как указано выше, частота осцилляций пропорциональна $J_n(A/\omega)$, как и для случая одного кубита [7], а ее минимумы и максимумы определяются функцией Бесселя. Отметим, что при развертке по амплитуде положение точек экстремумов населенностей уровней не зависит от константы связи J , что видно как в рамках резонансного приближения, так и непосредственно из численного анализа.

На рис. 4 представлены зависимости вероятностей переходов между уровнями от управляющего параметра ϵ системы симметричных кубитов. Видно, что для перехода $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ в случае $J = 0$ наблюдаются пики многофоновых переходов при выполнении резонансного условия $\epsilon + n\omega \approx 0$, как и в случае несвязанных кубитов [6,7]. Видно также, что в этом случае для перехода $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ наблюдается расщепление резонансного пика. Данный эффект проявляется из-за двукратного вырождения промежуточного уровня системы симмет-

ричных кубитов при $J = 0$ (рис. 1). При изменении константы связи кубитов можно заметить интересные эффекты, которые проявляются в виде дополнительных пиков в зависимостях населенностей от управляющего параметра ϵ . Появление серии пиков, отвечающих условию $\epsilon \pm J + n\omega \approx 0$, объясняется в рамках резонансной теории возмущения наличием дополнительных частот, обусловленных взаимодействием. Для перехода $|1\rangle \rightarrow +2\rangle$ наблюдается смещение пика на величину, равную значению константы связи. Следует отметить, что для переходов $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ существуют положения резонансов, которые на зависят от абсолютной величины константы J и не объясняются в рамках резонансной теории, так как амплитуда внешнего поля велика, но данные пики можно качественно объяснить на основе квазиэнергетической теории. Из рис. 5 видно, что при $J \neq 0$ возникают дополнительные сближения квазиуровней, что приводит к резонансному туннелированию в системе. Появление же серии дробных резонансов можно объяснить по аналогии с нелинейной механикой [13].

Зависимости населенностей от параметра ϵ и амплитуды внешнего переменного поля представлены на рис. 6. Интерференционная картина суммирует и обобщает результаты, которые представлены на рис. 3, 4, где демонстрируется влияние параметров системы на положение минимумов и максимумов вероятностей перехода. Как видно из рис. 6, положение пиков на интерференционной картине существенно зависит от константы связи, что позволяет определить ее экспериментально.

4. Заключение

В настоящей работе исследована динамика связанных кубитов в сильном переменном поле. Для качественного понимания механизма воздействия поля на многоуровневую систему мы использовали резонансное приближение, которое позволило найти простые условия резонансного возбуждения системы. Полученные условия отличаются от тех, которые имеют место в случае одного кубита, поскольку они содержат константу взаимодействия кубитов. Выполненное численное моделирование подтверждает качественные выводы, следующие из резонансного приближения. Как оказалось, при большой амплитуде поля система действительно эволюционирует адиабатически, за исключением непосредственной близости от квазипересекающихся уровней, где наблюдаются квантово-когерентные переходы Ландау–Зинера.

Наше рассмотрение показывает также, что изменение амплитуды поля и управляющих параметров сильно влияет на динамику системы. Интерференционные картины демонстрируют возможность получения дополнительной информации о кубитах, поскольку положения максимумов вероятностей переходов оказались зависящими от параметра связи кубитов.

Развитая в работе теория амплитудной спектроскопии кубитов естественным образом распространяется на более сложные системы. Например, эта методика может быть использована для изучения спектров искусственных квантовых объектов: квантовых ям, квантовых точек, квантовых проволок и других, в которых расстояния между энергетическими уровнями гораздо меньше, чем в атомах.

Список литературы

- [1] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, P. Hakonen. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 187 002 (2006).
- [2] D. Berns, M. Rudner, S. Valenzuela, K. Berggren, W. Oliver, L. Levitov, T. Orland. *Nature* **455**, 51 (2008).
- [3] W. Oliver, S. Valenzuela. ArXiv: cond-mat/0906.0185v1 (2009).
- [4] L.D. Landau. *Phys. Z. Sow.* **2**, 46 (1932).
- [5] C. Zener. *Proc. R. Soc. London A* **137**, 696 (1932).
- [6] S.N. Shevchenko, S. Ashhab, F. Nori. ArXiv: cond-mat/0911.1917v1 (2009).
- [7] S. Ashhab, J.R. Johansson, A.M. Zagoskin, F. Nori. *Phys. Rev. A* **75**, 063 414 (2007).
- [8] M. Grifoni, P. Hänggi. *Phys. Rep.* **304**, 229 (1998).
- [9] J.H. Shirley. *Phys. Rev.* **138**, B979 (1965).
- [10] Я.Б. Зельдович. *УФН* **110**, 139 (1973).
- [11] M. Grajcar, A. Izmalkov, S.H.W. van der Ploeg, S. Linzen, E. Il'ichev, Th. Wagner, U. Hübner, H.-G. Meyer, A.M. van den Brink, S. Uchaikin, A.M. Zagoskin. *Phys. Rev. B* **72**, 020 503 (2005).
- [12] M.J. Storcz, F.K. Wilhwlml. *Phys. Rev. A* **67**, 042 319 (2003).
- [13] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, М. (1974). 504 с.