

01;04
©1995

ТОЧНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ В ВИДЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СТОЯЧЕЙ ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНЫ

П.А.Поляков

Несмотря на бурное развитие компьютерной техники, интерес к аналитическим методам исследования нелинейных уравнений и их точным частным решениям продолжает оставаться высоким. Каждое новое аналитическое решение как физически важных, так и модельных нелинейных уравнений позволяет глубже понять особенности поведения нелинейных систем. К сожалению, число различных аналитических нелинейных решений для плазменных систем невелико и большинство из них получено для неограниченной плазмы в частном случае, когда зависимость физических величин от координаты x и времени t выбраны в виде $x-vt$, где v — константа [1,3]. В последнее время найдены интересные решения и для ограниченной плазмы [4,5]. Другой класс решений для ограниченной плазмы, который можно интерпретировать как нелинейные стоячие плазменные волны, был обнаружен Левидсоном [6]. Однако в [6] не найдено аналитическое решение этого вида для эйлеровых переменных, а соответствующее решение представлено в виде бесконечного ряда, содержащего функции Бесселя. В настоящей работе получено новое точное аналитическое решение в эйлеровом представлении, принадлежащее классу нелинейных стоячих плазменных волн.

Рассмотрим движение электронной компоненты холодной плазмы с неподвижными ионами. В одномерном случае уравнения непрерывности Эйлера и Пуассона будут иметь вид [6,7]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{e}{m} E, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e(n - n_0), \quad (2)$$

где $u = u(x, t)$ — гидродинамическая скорость электронов, $E = E(x, t)$ — напряженность электрического поля, $n = n(x, t)$ — концентрация электронов, n_0 — концентрация ионов.

Для ограниченной плазмы уравнения (1), (2) необходимо дополнить граничными условиями. Предполагая, что движение электронной компоненты плазмы происходит в области $0 \leq x \leq L$ в качестве граничных условий, выберем соотношения:

$$E(0, t) = E(L, t) = u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (3)$$

Систему (1), (2) можно представить в виде [6,7]:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{e}{m}E, \quad \frac{dE}{dt} = -4\pi n_0 u, \quad (4)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5)$$

Из (4), (5) находим гидродинамическое уравнение в лагранжевых переменных, эквивалентное эйлеровой системе (1), (2):

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_p^2 u = 0, \quad (6)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$ — электронная плазменная частота. Учитывая, что $u(t) = dx(t)/dt$, из (6) для лагранжевой координаты $x(t)$ получим

$$x(t) = A(x_0, u_0) \sin(\omega_p t + \phi(x_0, u_0)) / \omega_p + C(x_0, u_0), \quad (7)$$

где $A(x_0, u_0)$, $\phi(x_0, u_0)$ и $C(x_0, u_0)$ — некоторые постоянные, определяемые начальными значениями лагранжевой координаты x_0 и скорости u_0 .

Используя (7), можно, в принципе, найти решение в эйлеровых переменных, соответствующее заданным начальным и граничным условиям. При этом необходимо, чтобы между $x(t)$ и x_0 существовало взаимно однозначное соответствие для любого момента времени, что накладывает на данное преобразование следующее дополнительное условие:

$$\partial x(t) / \partial x_0 \neq 0. \quad (8)$$

При нарушении условия (8) движение электронов плазмы будет многопоточковым, при этом уравнение становится несправедливым.

В работе [6] функции A , ϕ , C в (7) были определены из условия совпадения при малых амплитудах решения (9) с уравнением линейной стоячей гармонической волны. Однако в этом случае преобразование к эйлеровым переменным

не удается выразить аналитическими соотношениями. Покажем, что множество (7) содержит решения, удовлетворяющие граничным условиям и физически разумным начальным условиям, для которых преобразование к эйлеровым переменным имеет аналитический вид. Наиболее простым таким решением является следующее:

$$x(t) = \xi + \epsilon \xi (1 - \xi/L) \cos(\omega_p t), \quad (9)$$

где ξ — параметр, связанный с начальной координатой x_0 соотношением

$$\xi + \epsilon \xi (1 - \xi/L) = x_0. \quad (10)$$

Разрешая уравнение (9) относительно параметра ξ , находим искомое аналитическое преобразование к эйлеровым переменным

$$\xi = \xi(x, t) = L \left\{ (1 + \epsilon \cos(\omega_p t)) - \left[(1 + \epsilon \cos(\omega_p t))^2 - 4\epsilon (x/L) \cos(\omega_p t) \right]^{1/2} \right\} / (2\epsilon \cos(\omega_p t)), \quad (11)$$

где $x(t) = x$ — эйлерова координата. Принимая во внимание

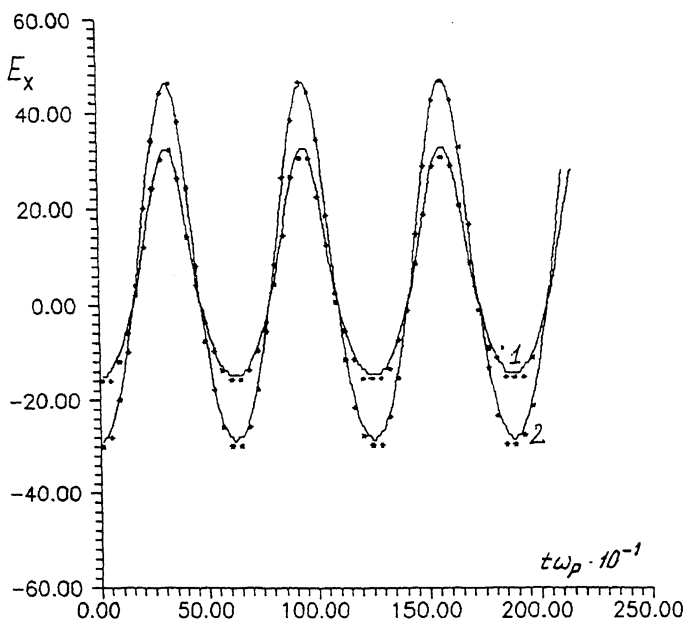


График изменения напряженности электрического поля от времени в нелинейной стоячей волне при $\epsilon = 0.5$ в точках $L/8$, $L/4$ (кривые 1, 2). Звездочками помечены значения E_x , полученные численным моделированием плазмы методом крупных частиц.

соотношение $u(t) = dx(t)/dt$ и используя (11), (4), получим следующее аналитическое решение эйлеровой системы (1), (2):

$$u(x, t) = \epsilon \xi(x, t) + \epsilon \xi(x, t)(1 - \xi(x, t)/L) \sin(\omega_p t); \quad (12)$$

$$E(x, t) = \frac{m}{e} \omega_p^2 \epsilon \xi(x, t) \frac{L - \xi(x, t)}{L} \cos(\omega_p t). \quad (13)$$

Условие (8) накладывает ограничение на величину амплитуды данной нелинейной стоячей волны и допускает для параметра ϵ только следующее значение: $-1 < \epsilon < 1$.

Полученное решение не является тривиальным с точки зрения эйлеровых уравнений, так как трудно себе представить, каким образом его можно было бы определить, находясь только в рамках эйлерова формализма. Выражения (11)–(13) описывают нелинейную стоячую волну в ограниченной плазме при параболическом начальном смещении электронов (10) и удовлетворяют необходимым граничным условиям (3). Используя данное решение, можно проанализировать характерные особенности нелинейных колебаний в ограниченной плазме, проверить правильность или эффективность различных численных схем решения. В частности, нами было проведено численное моделирование колебаний в одномерной плазме методом крупных частиц. Результаты этого моделирования при $\epsilon = 0.5$ представлены на рисунке. Звездочками отмечены значения, полученные из результатов численного моделирования, а непрерывные кривые построены на основании формулы (13). Приведенные результаты говорят о совпадении результатов численного эксперимента и теории.

Список литературы

- [1] Holloway J.P., Dorning J.J. // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. P. 3856–3868.
- [2] Владимиров В.С., Кривицкий С.В. // ЖЭТФ. 1992. Т. 101. В. 5. С. 1510–1520.
- [3] Алешин И.М., Дрофа М.А., Кузьменков Л.С. // Физика плазмы. 1993. Т. 19. В. 5. С. 1510–1520.
- [4] Aliev Yu., Stenflo L. // Phys. Scr. 1994. V. 50. P. 701–704.
- [5] Stenflo L., Yu M.Y. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. N 5. P. 1494–1496.
- [6] Davidson R.C. // Methods in Nonlinear Plasma Theory. N.Y.: Acad. press, 1972. Chap. 3. P. 33–41.
- [7] Ахиезер А.И. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 719 с.

Московский
государственный
университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию
26 июня 1995 г.