

Релаксационная динамика сверхпроводящих джозефсоновских кубитов в сильном переменном поле

© А.И. Гельман¹, А.М. Сатанин²

¹ Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород, Россия

² Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия

E-mail: gelman@appl.sci-nnov.ru

Методом квантовых траекторий изучено влияние шума на населенности уровней кубита в отдельных реализациях эксперимента, а также прослежен переход к усредненной динамике, получающейся путем многократных измерений состояния кубита. В качестве применения развитой методики исследовано влияние шума на интерференционную картину, возникающую при амплитудной спектроскопии вследствие переходов Ландау–Зинера в переменном поле. Изучено влияние числа повторяемых измерений и флуктуации фазы возбуждающего импульса при формировании отклика кубита на внешнее поле, что позволило дать интерпретацию недавних экспериментов с точки зрения единичных реализаций и усредненной динамики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-0297059) и программы РНП.

1. Введение

В последнее время выполнены измерения характеристик одиночных квантовых объектов: иона в магнитной ловушке, оптической моды в резонаторе, сверхпроводящих кубитов и др. Данные эксперименты стимулировали разработку теоретических методов описания единичных реализаций квантовых процессов. Возникшие в начале 90-х годов методы — квантовых траекторий, квантовых скачков (или квантовый метод Монте-Карло) — расчета волновой функции системы позволили глубже понять особенности релаксационного поведения квантовых систем [1]. Поскольку невозможно исключить влияние внешней среды на любой квантовый объект, исследование единичных реализаций процессов в квантовых системах (а не только усредненных данных) позволяет осуществлять численное моделирование многих экспериментов квантовой динамики, процессов передачи и хранения квантовой информации [2].

Одним из перспективных методов определения параметров квантовых объектов является ландау–зинеровская (ЛЗ) спектроскопия [3–10]. Практическая реализация ЛЗ-спектроскопии сводится к измерению населенностей кубита при фиксированной частоте в зависимости от амплитуды внешнего возбуждающего поля. Метод амплитудной спектроскопии (АС), развитый в недавних работах [7–11], позволил измерить как параметры кубитов, так и влияние шума на их усредненное поведение. Как известно, связь с внешней средой и экспериментальной установкой приводит к обратному шумовому воздействию на кубит. Неконтролируемое воздействие шума нарушает когерентность и затрудняет реализацию квантовых вычислений [2]. Существуют методы измерения характерных времен релаксации, основанные на резонансном и нерезонансном поглощении микроволнового излучения [12,13]. Метод ЛЗ-интерферометрии представляет собой новый подход для измерения параметров шума по его влиянию на интерференционную

картину, возникающую при воздействии переменного поля на кубиты. В свою очередь отьюстированный ЛЗ-интерферометр может быть использован для калибровки импульсов микроволнового излучения [10,11]. В последнее время разработка наиболее устойчивых к шуму кубитов представляется наиболее актуальной для реализации квантового компьютера [14–16].

В настоящей работе впервые выполнено исследование диссипативной динамики одиночного кубита в сильном переменном поле методом квантовых траекторий. Полученные в работе результаты позволяют дать интерпретацию ЛЗ-переходами и амплитудной спектроскопией кубитов с точки зрения единичных реализаций, а также установить связь с усредненной динамикой системы. Показано, что даже слабый шум существенно влияет на динамику кубита в единичной реализации и зависит от фазы поля в момент релаксации. Рассмотрено влияние различного уровня шума на населенности кубитов. Прослежен переход от результатов единичного эксперимента к усредненной зависимости населенности кубита от времени, которая может быть получена в экспериментах [9,10] путем многократного повторения опыта. В применении к методу АС найдено, что хотя отдельные зависимости населенности кубита от амплитуды внешнего поля требуют большого числа измерений и повторений эксперимента, итоговая интерференционная картина хорошо проявляется уже при сотнях реализаций, тогда как в недавних экспериментах проводятся десятки тысяч испытаний. Исследовано также влияние уровня шума на метод АС и обнаружена устойчивость к скорости дефазировки в кубите при больших амплитудах внешнего поля и резонансах высоких порядков.

2. Модель и уравнения

Основные черты динамического поведения сверхпроводящего кубита, изучаемого в экспериментах [7–11],

могут быть описаны гамильтонианом

$$H_s = \frac{1}{2} (\varepsilon(t) \sigma_z + \Delta \sigma_x), \quad (1)$$

где $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \cos \omega t$ — внешнее управляющее поле с периодом $T = 2\pi/\omega$, Δ — туннельное расщепление уровней, σ_z, σ_x — матрицы Паули. Параметром ε_0 , определяющим расстояние между уровнями, и амплитудой переменного A можно управлять, меняя соответственно величину магнитного потока и амплитуду ВЧ-поля, возбуждающего кубит.

Гамильтониан взаимодействия с резервуаром в общем виде можно представить как [14–16]

$$H_{\text{int}} = F_z \sigma_z + F_x \sigma_x, \quad (2)$$

где эрмитовы операторы F_x, F_z резервуара отвечают за продольную и поперечную релаксацию в системе и линейно зависят от операторов резервуара, F_z вызывает случайные изменения фазы волновой функции кубита, физически обусловленные флуктуацией потока через сверхпроводящий контур кубита, F_x отвечает за переворот спина и определяется, например, флуктуацией заряда на контактах. Таким образом, система эволюционирует под действием операторов резервуара $F_\alpha(t)$, статистические свойства которых определяются корреляционной функцией $\gamma(t-s) = \langle F_\alpha(t) F_\alpha^+(s) \rangle$ шума, который характеризуется гауссовой статистикой. Мы рассмотрим простейшую модель шума, обладающего гладким спектром $\tilde{\gamma}(\omega)$ в широкой области частот в окрестности расстояния между уровнями ε_0 , что соответствует марковскому резервуару. Такая ситуация реализуется на практике во многих экспериментах [7–10].

3. Метод квантовых траекторий

Если кубит реализуется в виде плоских сверхпроводящих контуров, то главным источником шума являются флуктуации магнитного потока и в (2) можно удержать только поперечную релаксацию F_z . В этом случае уравнение для оператора плотности кубита ρ в марковском приближении можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_s, \rho] + \frac{\Gamma}{2} (\sigma_z \rho \sigma_z - \rho), \quad (3)$$

где скорость Γ характеризует процесс затухания фазы (дефазировку), обычно существенно доминирует над процессом релаксации энергии, которым в данном приближении пренебрегаем [10] (см. [16]). Скорость дефазировки Γ известным образом определяется спектром переменных резервуара вида $\tilde{\gamma}(\omega)$ [17].

Уравнение (3) дает усредненную по ансамблю квантовую динамику системы. Чтобы проследить динамику отдельного кубита, обратимся к методу квантовых траекторий. Согласно этому подходу, динамика квантовой системы представляется как непрерывное изменение векторов состояния $|\psi^{(i)}(t)\rangle$ (i -го представителя или

„квантовой траектории“) под действием неэрмитового гамильтониана \hat{H}_{eff} согласно

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi^{(i)}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{eff}} |\psi^{(i)}(t)\rangle, \quad (4)$$

где i — номер траектории, \hat{H}_{eff} — гамильтониан Вигнера–Вайскопфа,

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H} - \frac{i\hbar\Gamma}{4} \hat{I}, \quad (5)$$

\hat{I} — единичный оператор. При этом диссипативная динамика прерывается скачками, переводящими волновую функцию в новое состояние, когда имеет место акт дефазировки

$$|\psi^{(i)}(t + \Delta t)\rangle = \lambda \sigma_z |\psi^{(i)}(t)\rangle, \quad (6)$$

где λ — нормированная константа. Вероятность скачков $P^{(i)}(t)$ под действием оператора σ_z зависит от времени и может быть вычислена согласно [1]

$$P^{(i)}(t) = \Gamma / 2\Delta t |\psi^{(i)}(t)|^2, \quad (7)$$

где Δt — шаг по времени, через который рассматривается эволюция системы. После i -го прохода по времени мы получаем квантовую траекторию, представляющую одну реализацию реального эксперимента — диссипативную динамику одного кубита. Поскольку процесс релаксации является случайным, каждая траектория уникальна. Для получения среднего значения произвольного оператора A , определяющего параметры системы, для различных реализаций волновой функции $|\psi^{(i)}(t)\rangle$ рассматривается квантово-механическое среднее $\langle \psi^{(i)}(t) | A | \psi^{(i)}(t) \rangle$ берется среднее по числу реализаций N

$$\langle A \rangle_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \psi^{(i)}(t) | A | \psi^{(i)}(t) \rangle. \quad (8)$$

4. Результаты и обсуждение

Поведение кубита в сильном переменном поле в отсутствии квантового шума хорошо известно (см. [18] и цитированную там литературу). В резонансном приближении, когда $\varepsilon_0 \approx n\omega$ и $\Delta \ll \omega$ (далее выбираем систему единиц, в которой $\hbar = 1$), эффективный гамильтониан системы, описывающий медленное движение, запишется в виде

$$H'(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Delta_n \\ \Delta_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\Delta_n = \Delta J_n(A/\omega)$, $J_n(x)$ — функция Бесселя, n — номер резонанса. Гамильтониан хорошо известен в квантовой оптике и соответствует резонансному взаимодействию лазерного поля с двухуровневым атомом, где $|\Delta_n|$ — частота Раби [17]. В данном случае зависимость Δ_n от амплитуды ВЧ-поля определяется функцией Бесселя, порядок которой соответствует номеру

резонанса порядка, и может достигать нуля даже в условиях резонанса, что приводит к отсутствию возбуждения системы и эффекту когерентного подавления туннелирования (КПТ) [19,20] даже при сильных полях, когда $A \gg \Delta, \varepsilon_0$. Из (9) и стандартного анализа Раби динамики системы [17] можно получить усредненную по времени вероятность нахождения кубита в возбужденном состоянии

$$P_{sw} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^2}{\Delta_n^2 + (\varepsilon_0 - n\omega)^2}. \quad (10)$$

При монотонном увеличении амплитуды приложенного поля наблюдаются изменения частоты Раби осцилляторного типа, что приводит к характерной интерференционной картине, используемой в АС кубита [7–10]. Рассмотрение данной задачи также возможно в рамках модели ЛЗ квазипересечения энергетических уровней [6]. В моменты времени, определяемые соотношением $\varepsilon(t) = 0$, происходит пересечение недиабатических (без учета расщепления уровней Δ) энергетических уровней кубита $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$, являющихся собственными состояниями σ_z . Вероятность перехода $|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$ дается формулой $P_{LZ} = 1 - \exp(-2\pi\Delta^2/v)$, где $v \equiv \partial\varepsilon(t)/\partial t_{\varepsilon(t)=0}$ — скорость изменения разности энергии между уровнями в момент пересечения, в пределе бесконечного времени, если скорость пересечения области взаимодействия v можно считать постоянной. При этом повторяющиеся переходы ЛЗ, вызванные периодическим воздействием на систему $\varepsilon(t)$, приводят к многочисленным новым эффектам [6–10].

В нашем рассмотрении предполагается, что начальное состояние кубита соответствует нижнему уровню $|0\rangle = -\sin\theta/2|\uparrow\rangle + \cos\theta/2|\downarrow\rangle$, где $\theta = \arctan\Delta/\varepsilon_0$, т.е. зависит от внешнего поля ε_0 . Тогда при больших ε_0 ($\varepsilon_0 \gg \Delta$) система фактически находится в чистом состоянии $|\downarrow\rangle$, при малых — в суперпозиции. Однако, учитывая, что в эксперименте можно измерить состояния $|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle$, мы рассматриваем динамику именно в этом базисе и исследуем населенность возбужденного состояния $|\uparrow\rangle$.

Результаты расчета населенности верхнего уровня единичного кубита представлены на рис. 1 для нескольких типичных для эксперимента скоростей дефазировок Γ при однофотонном резонансе, когда $\varepsilon_0 = \omega$.

Как видно из рис. 1, при большой амплитуде в каждой реализации наблюдается характерная Раби-динамика, хорошо описываемая резонансным приближением (9) (с учетом осцилляций при переходах ЛЗ). При $A = 10.2\omega$ (рис. 1, b) эффективная частота Раби кубита $|\Delta_1(A)| = \Delta|J_1(A/\omega)| \approx 0$, что соответствует эффекту КПТ, когда кубит не возбуждается сильным внешним полем, тогда как при $A = 8.5\omega$ частота Раби $|\Delta_1(A)| \approx 0.27\omega$ (рис. 1, a).

При увеличении скоростей дефазировок Γ характер траекторий существенно меняется. Если на начальном участке траектории определяются диссипативной динамикой Вигнера–Вайскопфа, то после первого скачка они

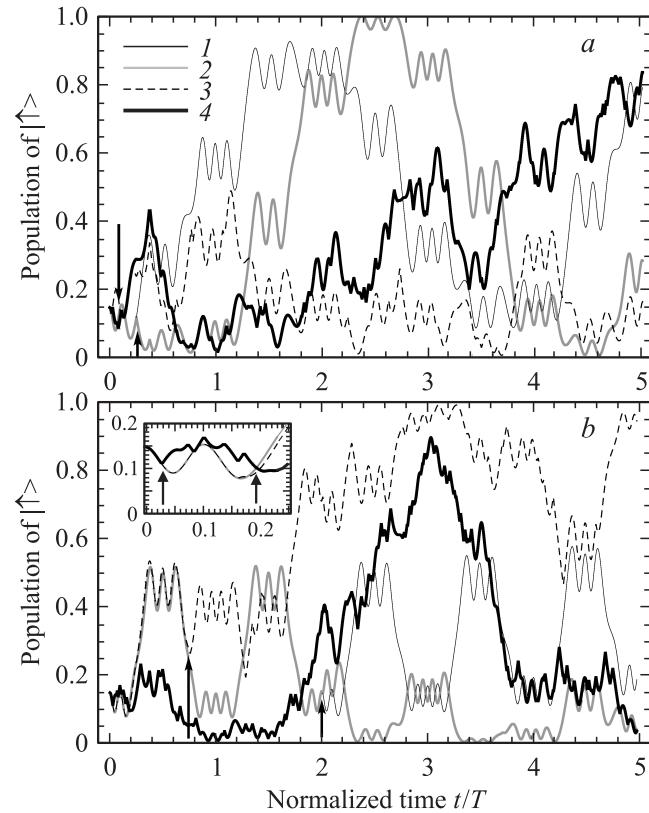


Рис. 1. Зависимость населенности верхнего уровня от времени при скоростях дефазировок $\Gamma = 0$ (1), 0.09ω (2), 0.81ω (3) и 4ω (4). Стрелками обозначен момент первой дефазировки, когда траектории расходятся. Параметры $\Delta = \omega$, $\varepsilon_0 = \omega$; $A = 8.5\omega$ (a) и 10.2ω (b). На вставке — начальный участок траектории.

существенно различаются (стрелки на рис. 1). Сказывается момент времени релаксации, так как в зависимости от фазы поля динамика будет различной [20]. В условиях КПТ (рис. 1, b) видно, как даже слабая дефазировка существенно влияет на динамику кубита (линии 1, 2 на рис. 1, b), а при большой релаксации кубит может возбуждаться на верхний уровень, чего не происходит без релаксации за рассмотренное время. Кроме того, для $\Gamma = 0.09\omega$ и 0.81ω еще видны признаки осцилляций ЛЗ (пленение на недиабатическом уровне на временах $T/2$), а при $\Gamma = 4\omega$ они отсутствуют.

Поведение населенностей в режиме многофотонного резонанса при большом постоянном поле $\varepsilon_0 = 30\omega$ представлено на рис. 2. Видно, что пленение населенностей происходит на временах порядка $T/2$ [19,20]. При этом в присутствии шума наблюдается эффект КПТ (при $|\Delta_{30}(45.5)| \approx 0$, рис. 2, b) и Раби-динамика (рис. 2, a). Переходы ЛЗ хорошо локализованы во времени, так как выполняется неравенство $A \gg \Delta$ [20,21]. Результаты показывают, что, несмотря на сильное внешнее поле, дефазировка существенно сказывается на динамике системы в отдельно взятом эксперименте. Как видно, элементы когерентной динамики, такие как осцилляции ЛЗ, эффект КПТ, осцилляции Раби, нарушаются при учете

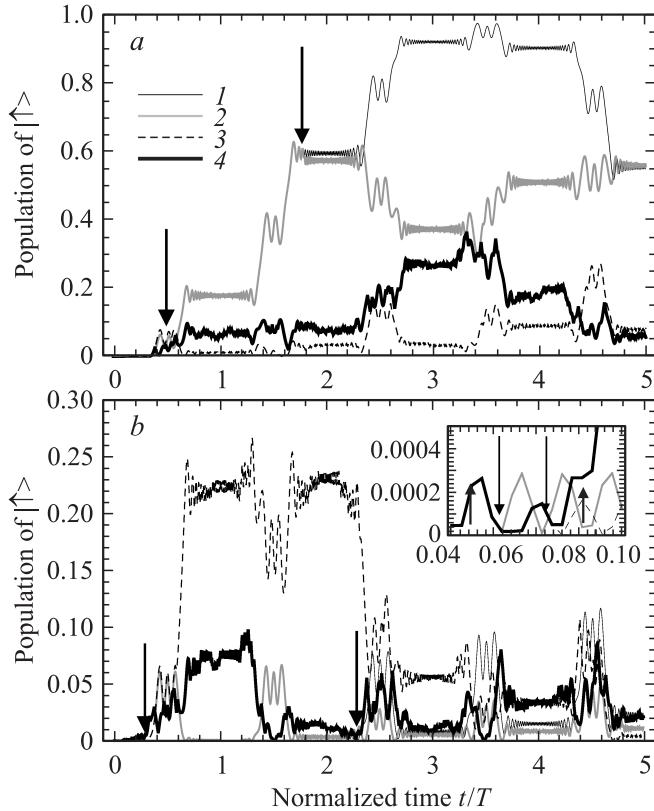


Рис. 2. Зависимость населенности верхнего уровня от времени при различных скоростях дефазировки. Обозначение кривых то же, что на рис. 1. Стрелками обозначен момент первой дефазировки, когда траектории расходятся. Параметры $\Delta = \omega$, $\varepsilon_0 = 30\omega$; $A = 45.5\omega$ (а) и 43.3ω (б). На вставке — начальный участок траектории.

релаксации. При этом даже слабая дефазировка может существенно изменить динамику системы, несмотря на сильное управляющее поле.

5. Усредненная динамика

При обработке эксперимента по измерению параметров кубита требуется осуществить томографию состояния кубита, выполняя представительное число измерений, обычно повторяя их от сотен до десятков тысяч раз [7–10]. Этот процесс может быть напрямую смоделирован в рамках метода квантовых траекторий. С точки зрения эксперимента наиболее интересно проследить поведение населенностей от времени вблизи максимумов и минимумов $\Delta_n(A)$ и переход к усредненной по ансамблю динамике системы, генерируя единичные траектории типа тех, что изображены на рис. 1 и 2. Результаты таких вычислений представлены на рис. 3, для различных скоростей релаксации Γ (для тех же параметров, что и на рис. 1). Без учета релаксации данные на рис. 1 и 3 полностью совпадают (линии 1). Видно отличие релаксационной динамики в одной реализации — стохастическое случайное движение (рис. 1) —

от усредненной динамики, когда наблюдается насыщение и выход населенности на стационарное значение [10].

Отметим, что в работе [21] исследовано шумовое воздействие на усредненную динамику кубита при переходах ЛЗ более детально. Результаты численного моделирования для выбранных параметров качественно согласуются с [21].

6. Приложение к амплитудной спектроскопии

Чтобы извлечь дополнительную информацию о влиянии процесса измерения и шума на состояния кубита, методом траекторий было изучено формирование интерференционной картины в экспериментах по АС в зависимости от скорости дефазировки Γ и числа реализаций. В соответствии с [10] было рассмотрено воздействие на кубит ВЧ-поля частоты ω , импульса постоянной амплитуды длительностью $\tau = 10T$ и шума. По окончании импульса фиксировалась населенность на верхнем уровне $P_{\uparrow}(A, \varepsilon_0)$ в момент времени $t^* = \tau$ (усредненная по числу реализаций эксперимента 3000 раз). Интерференционная картина $P_{\uparrow}(A, \varepsilon_0)$ представлена на рис. 4 для различных значений скорости дефазировки Γ при

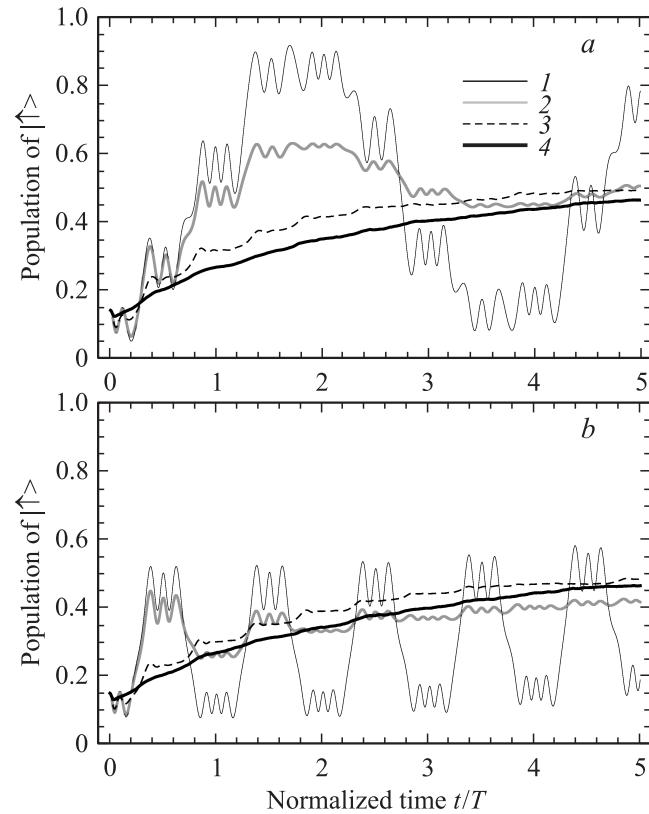


Рис. 3. Зависимость населенности верхнего уровня от времени (усреднение по 3000 реализаций). Обозначения и параметры те же, что на рис. 1. В отличие от стохастической динамики (см. рис. 1) наблюдается выход населенности на стационарные значения.

$\Delta = \omega$. Когда скорость дефазировки достигает значения $\Gamma \approx \omega$, многофотонные резонансы, определяемые условием $\varepsilon_0 = n\omega$, замываются. Однако резонансы высоких порядков ($\varepsilon_0 \gg \omega$) различимы на интерференционной картине (особенно это видно при сканировании по амплитуде поля A) в отличие от ситуации с малым ε_0 , где уже при $\Gamma = 0.25\omega$ наблюдается сильное перекрытие резонансов. Высокая контрастность интерференционной картины в области многофотонных резонансов может быть использована для диагностики состояний кубитов и измерения их характеристик.

Существенным преимуществом подхода, основанного на методе квантовых траекторий, является возможность

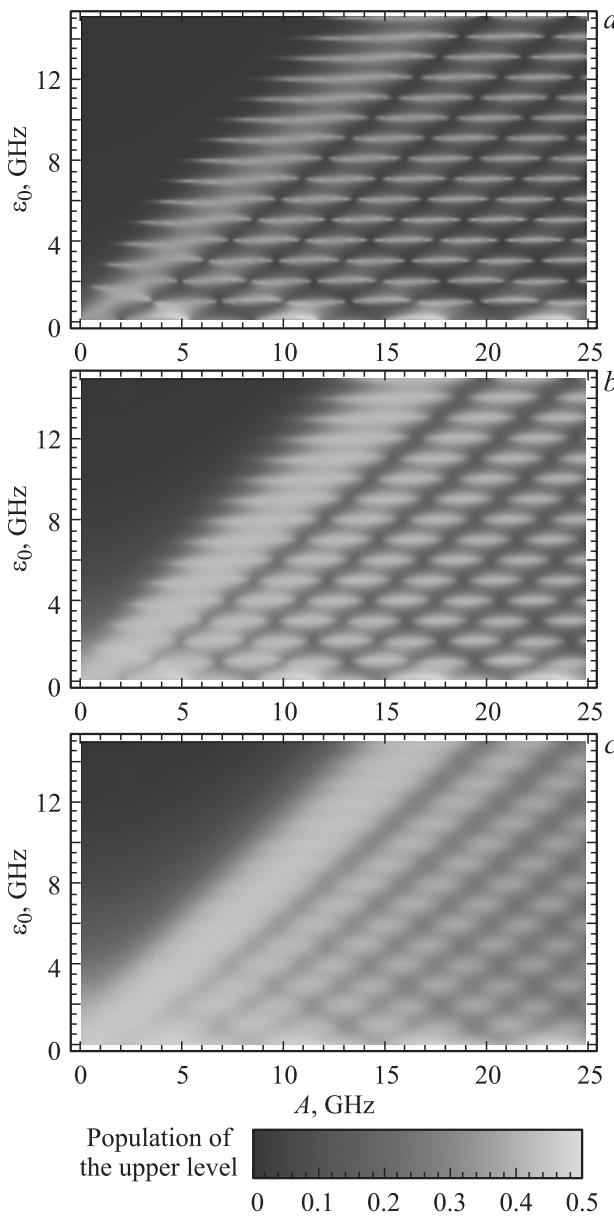


Рис. 4. Населенность верхнего уровня по окончании действия возбуждающего поля в зависимости от параметров ε_0 и A управляющего поля для $\Delta = \omega$ и различных скоростей дефазировки. $\Gamma = 0.01\omega$ (a), 0.09ω (b) и 0.25ω (c). $\omega = 1$ GHz.

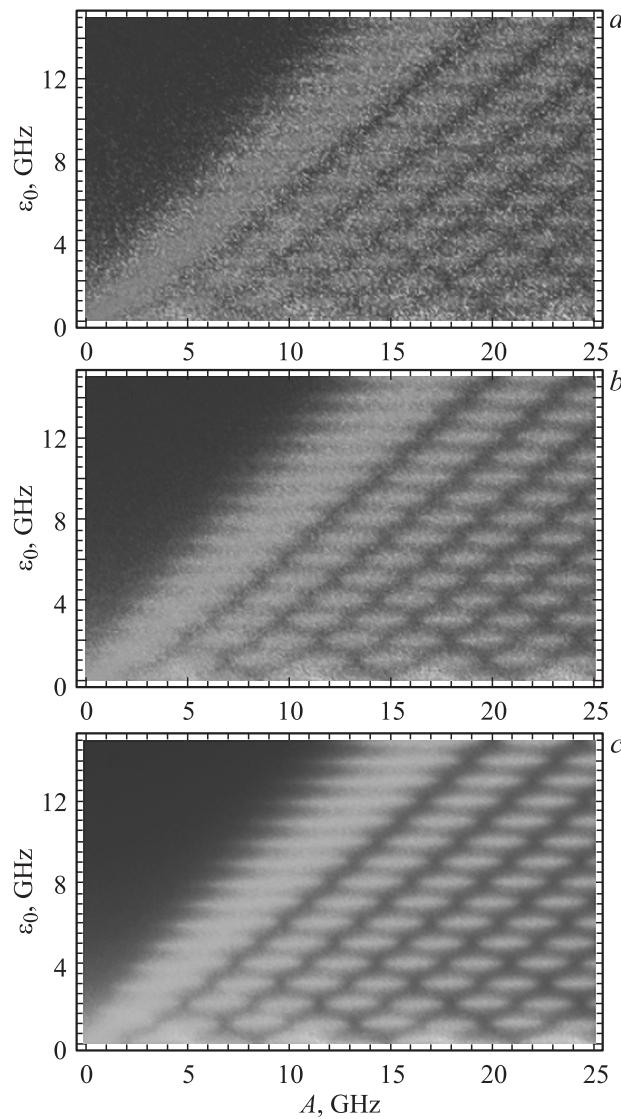


Рис. 5. Населенность верхнего уровня по окончании действия возбуждающего поля в зависимости от параметров ε_0 и A управляющего поля для $\Delta = \omega$. Число реализаций эксперимента $N = 1$ (a), 10 (b) и 100 (c). Результат, полученный при $N = 100$, хорошо соответствует рис. 4, b для 3000 реализаций. $\omega = 1$ GHz.

осуществить мониторинг процесса измерения состояний кубита. На рис. 5 приведена интерференционная картина после 1, 10 и 100 измерений. Уже после 100 измерений (реализаций метода) картина видна достаточно хорошо, тогда как в экспериментах обычно проводят 3000–8000 измерений.

7. Заключение

Традиционные методики измерения спектров и населенности атомов и молекул осуществляются на ансамблях тождественных объектов. Возможность оперирования с единичными квантовыми объектами требует

развития нового подхода для интерпретации подобных экспериментов. Как было продемонстрировано, метод квантовых траекторий адекватно описывает релаксационную динамику джозефсоновского кубита в единичных реализациях и позволяет проследить его усредненную динамику. В работе приведены результаты анализа характерных режимов, такие как эффект КПТ и динамика переходов ЛЗ, как в одной реализации эксперимента в условиях шума, так и для усредненной по реализациям динамики в зависимости от величины скоростей квантовой релаксации. Явно показано, что даже слабый шум может существенно нарушить динамику единичной квантовой системы. Рассмотрено формирование интерференционной картины метода АС в зависимости от числа измерений кубита и показана возможность контрастного формирования интерференционной картины уже при 100 реализациях. При сильных полях $\varepsilon_0, A \gg \omega$ продемонстрирована устойчивость метода АС к дефазировке. Вывод о высокой контрастности интерференционной картины даже при сильных шумах позволяет рассматривать метод амплитудной спектроскопии как перспективный для измерения параметров кубита, которые сильно связаны шумовым резервуаром. Метод позволил также из первых принципов промоделировать реальный процесс измерения кубита, включая в рассмотрение флуктуацию фазы управляющего сигнала.

Авторы признательны В.А. Миронову за полезные замечания.

Список литературы

- [1] M.B. Plenio, P.L. Knight. Rev. Mod. Phys. **70**, 101 (1998).
- [2] М. Нильсен, И. Чанг. Квантовые вычисления и квантовая информация. Мир, М. (2006). 824 с.
- [3] L.D. Landau. Phys. Z. Sow. **2**, 46 (1932).
- [4] C. Zener. Proc. R. Soc. A **137**, 696 (1932).
- [5] S. Yoakum, L. Sirkko, P.M. Koch. Phys. Rev. Lett. **69**, 1919 (1992); W. van de Water, S. Yoakum, T. van Leeuwen, B.E. Sauer, L. Moorman, E.J. Galvez, D.R. Mariani, P.M. Koch. Phys. Rev. A **42**, 572 (1990).
- [6] A.V. Shytov, D.A. Ivanov, M.V. Feigel'man. Eur. Phys. J. B **36**, 263 (2003).
- [7] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, P. Hakonen. Phys. Rev. Lett. **96**, 187002 (2006).
- [8] W.D. Oliver, Y. Yu, J.C. Lee, K.K. Berggren, L.S. Levitov, T.P. Orlando. Science **310**, 1653 (2005).
- [9] D.M. Berns, W.D. Oliver, S.O. Valenzuela, A.V. Shytov, K.K. Berggren, L.S. Levitov, T.P. Orlando. Phys. Rev. Lett. **97**, 150502 (2006).
- [10] D.M. Berns, M.S. Rudner, S.O. Valenzuela, K.K. Berggren, W.D. Oliver, L.S. Levitov, T.P. Orlando. Nature **455**, 51 (2008).
- [11] M.S. Rudner, A.V. Shutov, L.S. Levitov, D.M. Burns, W.D. Olivier, S.O. Valenzuela, T.P. Orlando. Phys. Rev. Lett. **101**, 190502 (2008).
- [12] C.H. van der Wal, A.C.J. ter Haar, F.K. Wilhelm, R.N. Schouten, C.J.P.M. Harmans, T.P. Orlando, S. Lloyd, J.E. Mooij. Science **290**, 773 (2000).
- [13] A. Izmalkov, M. Grajcar, E. Il'ichev, Th. Wagner, H.-G. Meyer, A.Yu. Smirnov, M.H.S. Amin, A.M. van den Brink, A.M. Zagoskin. Phys. Rev. Lett. **93**, 037003 (2004).
- [14] Yu. Makhlin, G. Schon, A. Shnirman. Rev. Mod. Phys. **73**, 357 (2001).
- [15] J.Q. You, F. Nori. Phys. Today **58**, 11, 42 (2005).
- [16] G. Wendin, V.S. Shumeiko. In: Handbook of theoretical and computational nanotechnology / Eds M. Rieth, W. Schommers. American Scietific, N. Y. (2006). V. 3.
- [17] М.О. Скалли, М.С. Зубайри. Квантовая оптика. Физматлит, М. (2003). 512 с.
- [18] S. Ashhab, J.R. Johansson, A.M. Zagoskin, F. Nori. Phys. Rev. A **75**, 063414 (2007).
- [19] G.S. Agarwal, W. Harshwardhan. Phys. Rev. A **50**, R 4465 (1994).
- [20] M.B. Garraway, N.V. Vitanov. Phys. Rev. A **55**, 6, 4418 (1997).
- [21] K. Saito, M. Wubs, S. Kohler, Y. Kayanuma, P. Hänggi. Phys. Rev. B **75**, 214308 (2007).