01;05;06

НЕЛИНЕЙНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ФРАКТАЛЬНЫХ РЕЗИСТОРОВ

А.М.Сатанин

Фрактальный резистор может быть приготовлен путем осаждения паров металла и диэлектрика на подложку или путем спекания мелкодисперсных порошков. При этом концентрация смеси должна соответствовать порогу протекания, тогда токонесущий каркас будет представлять собой фрактал [1]. Например, в случае тонкой пленки ($d = 2$) эта концентрация $p_c = 0.5$, а в случае трехмерного образца ($d = 3$) $p_c = 0.17$ [2]. Линейная проводимость двухкомпонентной бесконечной среды на пороге протекания хорошо изучена. Если проводимость металлической компоненты σ_{M}, а диэлектрической σ_D, то эффективная проводимость σ_e зависит только от $h = \sigma_D/\sigma_{\text{M}}$ и описывается степенным законом

$$\sigma_e = \sigma_{\text{M}} h^u, \tag{1}$$

где u — критический индекс. Значения индекса u в настоящее время точно известны. В двумерном случае $u = 1/2$. Этот важный результат впервые получен Дыхне [3], исходя из дуальной симметрии. В трехмерном случае $u = 2/3$ (см. [4,5]).

При малых h проводимость падает, однако в системе растут пространственные флуктуации напряженности электрического поля [3] и на "слабых" участках будут включаться разогревные механизмы нелинейности. Их можно учесть, привлекая понятие электронной температуры, поскольку в металлах частота электрон-электронных столкновений велика. При этом поправка к электронной температуре пропорциональна квадрату напряженности поля. На феноменологическом уровне нелинейные эффекты описываются выражением для тока

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} + a \mathbf{e}^2 \mathbf{e}, \tag{2}$$

где $\mathbf{e}$ — локальное электрическое поле, а σ и a — соответственно линейная и нелинейная проводимости. В случайной среде они являются случайными переменными. Нас будут интересовать эффективные проводимости σ_e и a_e, которые определяются соотношением

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \mathbf{E} + a_e \mathbf{E}^2 \mathbf{E}, \tag{3}$$

где $\langle\rangle$ означает среднее по объему, $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle$ — среднее электрическое поле.

В данной работе показано, что нелинейная проводимость a_e также описывается степенной зависимостью от h, однако она растет при $h \to 0$ как

$$a_e \sim a_D h^{-w}, \qquad w > 0, \tag{4}$$

а характерное нелинейное поле падает $E_\text{п} \sim h^{\varkappa}$, $\varkappa > 0$, т.е. на пороге протекания среда становится аномально нелинейной. Мы покажем также, что несмотря на то, что корреляционный радиус ξ растет при $p \to p_c$ и может существенно превышать размеры реального образца L, существует другой масштаб R, зависящий от h, такой, что при $L > R$ проводимость системы эффективно усредняется. Отсюда следует, что при конечных h может быть приготовлен фрактальный резистор, который будет статистически однородным объектом и его проводимости будут описываться соотношениями (1) и (4). В работе впервые вычислены индексы w и $\varkappa$.

Привлекая соображения, высказанные в работе [6], можно определить характерный масштаб R, который играет роль корреляционного радиуса однородного фрактала при $L \lesssim \xi$. Как хорошо известно, при $L > \xi$ эффективная проводимость вблизи порога протекания описывается степенными зависимостями

$$\sigma_e = \sigma_\text{м}(\xi/b)^{-t/\nu}, \quad p > p_c; \qquad \sigma_e = \sigma_D(\xi/b)^{s/\nu}, \quad p < p_c, \tag{5}$$

где $\xi = b\tau^{-\nu}$, $\tau = |p - p_c|$, b — минимальный масштаб неоднородности, ν, t и s — критические индексы [7], а на пороге протекания $\tau \ll h^{u/t}$ — соотношением (1). На масштабах L, существенно превышающих ξ, система однородна и ее полная проводимость (кондактанс) $G(L)$ определяется выражением $G(L) = (L/\xi)^{d-2}G(\xi)$, где $G(\xi)$ — кондактанс на масштабах $L \sim \xi$. При $L \lesssim \xi$ из масштабных соотношений получаются различные выражения в зависимости от начальных условий. Если в качестве начальных условий выбрать первое выражение (5), то получим

$$G_\text{м}(L) = L^{d-2-t/\nu} g_\text{м}, \tag{6}$$

а в случае, когда выбрано второе, то

$$G_D(L) = L^{d-2+s/\nu} g_D, \tag{7}$$

где $g_\text{м} = \sigma_\text{м} b^{d-2}$ и $g_D = \sigma_D b^{d-2}$ — кондактансы участков с минимальным масштабом неоднородности. Видно, что $G_\text{м}(L)$ падает с ростом L, а $G_D(L)$ — растет. В случае $\tau^{u/t} \ll h \ll 1$

существует масштаб R, при котором кондактансы сравняются $G_{\text{м}}(R) = G_D(R)$ [6]. Этот масштаб будет характеризовать неоднородности и процессы протекания тока на фрактальном проводнике в случае, когда $L \lesssim \xi$. Выражая кондактансы через удельные проводимости, получим

$$\sigma_{\text{м}}(R/b)^{-t/\nu} = \sigma_D(R/b)^{s/\nu}. \tag{8}$$

Из (8) находим

$$R = bh^{-\nu/(t+s)}. \tag{9}$$

Теперь убедимся, что при $R < L \lesssim \xi$ масштабные зависимости для фрактала выражаются в виде степенных функций от R, определяемых (9). Для этого покажем, что оба равенства (5) приводят к выражению (1). Подставляя R вместо ξ в первое равенство, получим

$$\sigma_e = \sigma_{\text{м}}(R/b)^{-t/\nu} = \sigma_{\text{м}} h^{t/(t+s)}.$$

Аналогично, используя второе, имеем

$$\sigma_e = \sigma_D(R/b)^{s/\nu} = \sigma_D h^{-s/(t+s)} = \sigma_{\text{м}} h h^{-s/(t+s)},$$

что с учетом точного соотношения $u = t/(t+s)$ [7] дает (1).

Полная проводимость на масштабе $L < \xi$, когда система сильно неоднородна, определяется "слабыми" звеньями. Следуя [6], представим полную проводимость в виде $G_c = N_c g_D$, где N_c — число эффективных связей, которые обеспечивают протекание тока между кластерами масшатаба R. Тогда из соотношения

$$N_c g_D / R^{d-2} = \sigma_D(R/b)^{s/\nu} \tag{10}$$

следует, что $N_c = (R/b)^{d-2+s/\nu}$. Пусть на масштабе L к L^d кубу приложено напряжение U. Падение напряжения при $h \ll 1$ будет происходить преимущественно на прослойках между кластерами, т.е. "слабых" звеньях. Следовательно, $V_c = RE$, где $E = U/L$. Вычислим ток через грань куба, площадь которой L^{d-1}. Полный ток через грань подчиняется масштабному уравнению

$$I(L) = (L/R)^{d-1} I(R), \qquad I(R) = I_c N_c, \tag{11}$$

где I_c — ток через "слабую" связь. Критический ток определяется равенством

$$I_c = G_c V_c + A_c V_c^3, \tag{12}$$

где $G_c = G_D$, $A_c = a_D b^{d-4}$. Плотность тока следует из выражения

$$j = \frac{I(L)}{L^{d-1}} = \frac{N_c I_c}{R^{d-1}}. \tag{13}$$

Подставляя N_c и I_c в (13), найдем

$$j = \frac{g_D N_c R}{R^{d-1}} E + \frac{A_c N_c R^3}{R^{d-1}} E^3. \qquad (14)$$

Из (14) легко видеть, что линейная проводимость совпадает с (1), а нелинейная равна

$$a_e = \frac{A_c N_c}{R^{d-4}} = a_D \left(\frac{R}{b}\right)^{2+s/\nu} = a_D h^{-w}, \qquad (15)$$

где $w = u(s+2\nu)$. Используя известные численные значения индексов t и ν [8], найдем: при $d = 2$ $w = 1.50$, при $d = 3$ $w = 1.02$. Эффективное поле нелинейности определим соотношением

$$E_n = (\sigma_e/a_e)^{1/2} = E_0 h^{\varkappa},$$

где $\varkappa = (u + w)/2$, $E_0 = (\sigma_{\text{м}}/a_D)^{1/2}$. Для пленки получим $\varkappa = 1.0$, а для трехмерного образца $\varkappa = 0.83$.

Таким образом, резистор с размерами $L > R$, где R определено (9), ведет себя как фрактальный объект. Он обладает автомодельной структурой, а физические процессы на нем описываются степенными функциями. Следует еще раз подчеркнуть, что нелинейная проводимость растет при $h \to 0$, а эффективное поле нелинейности падает. Новое свойство нелинейной проводимости смесей металл–диэлектрик, обнаруженное в данной работе, позволит создавать искусственные нелинейные среды и управлять их свойствами.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 93–02–14178) и Госкомитетом РФ по высшему образованию (грант 94–31.4–20).

Список литературы

[1] *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
[2] *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979. 416 с.
[3] *Дыхне А.М.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. В. 1(7). С. 110–115.
[4] *Kazakov V.A., Satanin A.M.* // Phys. Stat. Sol. (b). 1981. V. 108. P. 19–28.
[5] *Архинчеев В.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 50. В. 6. С. 293–295.
[6] *Ohtsuki P., Keyes T.* // J. Phys. A: Math. Phys. 1984. V. 17. L559–563.
[7] *Efros A.L., Shklovskii B.I.* // Phys. Stat. Sol. (b). 1976. V. 76. P. 475–485.
[8] *Stauffer D.* // Phys. Rept. 1979. V. 54. P. 1–74.

Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского

Поступило в Редакцию 1 июня 1995 г.