01;03

ДЕКРЕМЕНТ ЗАТУХАНИЯ КАПИЛЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛАБОСФЕРОИДАЛЬНОЙ КАПЛИ

С.О.Ширяева, А.И.Григорьев

В самых разнообразных задачах физики, геофизики, техники и технологии встречается такой физический объект, как капля, совершающая малые колебания в окрестности равновесной формы в виде вытянутого сфероида [1]. Сфероидальность равновесной формы капли может обеспечиваться суперпозицией электрических, гравитационных, аэрогидродинамических сил [2]. Знание зависимостей инкрементов неустойчивости, частот и декрементов затухания различных мод капиллярных колебаний сфероидальной капли представляется весьма важным для понимания физических закономерностей временно́й эволюции сильно заряженных капель, неустойчивых по отношению к собственному заряду; незаряженных капель, неустойчивых по отношению к внешнему электрическому полю; закономерностей рассеяния электромагнитных волн облачными каплями и т.п., так как на разных стадиях реализации неустойчивостей в таких объектах они проходят через стадию сфероидальности [1]. Тем не менее ввиду известной математической сложности и громоздкости решения задачи о расчете капиллярных колебаний заряженной вязкой капли до сих пор не сосчитаны и декременты затухания капиллярных колебаний слабосфероидальной капли, хотя выражения для них могут быть получены из общих гидродинамических формул [3,4].

1. Декремент затухания η_k k-й моды капиллярных колебаний капли маловязкой жидкости, когда движение в объеме капли (за исключением тонкого поверхностного слоя) можно считать потенциальным, несложно получить из формулы [3,4]:

$$\eta_k = \frac{W_k}{2E_k}, \tag{1}$$

где W_k — скорость диссипации за счет вязкости энергии k-й моды; E_k — полная энергия k-й моды.

Скорость диссипации W_k при выше сформулированных условиях можно выразить через потенциал скоростей волнового движения жидкости Ψ_n в капле в виде интеграла ([3], с. 806)

$$W_k = -\mu \oint\limits_s (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\nabla}\Psi_n)^2 dS, \tag{2}$$

где интегрирование ведется по поверхности капли, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности, μ — коэффициент динамической вязкости.

Для полной энергии k-й моды капиллярных колебаний бесконечно малой амплитуды в соответствии с теоремой вириала [5] можно взять ее удвоенную кинетическую энергию

$$E_k = 2\rho \int\limits_v (\boldsymbol{\nabla}\Psi_n)^2 dv, \tag{3}$$

где интегрирование ведется по объему капли, ρ — плотность жидкости.

Выражение потенциала капиллярного волнового движения в слабосфероидальной капле в сферической системе координат с началом в центре капли можно записать в виде [6]

$$\Psi_k(\mathbf{r}, t) = C_k r^k Y_{km}(\theta, \varphi) \exp(st), \tag{4}$$

C_k — постоянный коэффициент; r, θ, φ — сферические координаты; s — комплексная частота; t — время; $Y_{km}(\theta, \varphi)$ — нормированная сферическая функция.

Для вычисления интегралов (2) и (3) необходимо знать уравнение равновесной сфероидальной поверхности, имеющее в указанной системе координат вид

$$r(\theta) = R\frac{(1-e^2)^{1/6}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}, \tag{5}$$

R — радиус равновесной сферической капли, e — эксцентриситет.

В линейном по квадрату эксцентриситета e^2 приближении уравнение слабосфероидальной поверхности может быть записано в более простой форме:

$$r(\theta) \approx \left[1 + \frac{e^2}{6}(3\cos^2\theta - 1)\right]. \tag{5a}$$

Выражение для нормали к поверхности сфероида в линейном же по e^2 приближении имеет вид

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_r + e^2 \sin\theta \cos\theta \mathbf{n}_\theta; \tag{6}$$

где $\mathbf{n}_r$ и $\mathbf{n}_\theta$ — орты соответствующих сферических координат.

Нижеследующие утверждения и расчеты проведем, имея в виду осесимметричные колебания сфероидальной капли, что не ограничивает общности рассуждений, но существенно уменьшает громоздкость математических выражений.

2. Вычислим энергию капиллярных колебаний k-й моды в соответствии с выражением (3). Для этого выпишем выражение для скорости потенциального волнового движения k-й моды:

$$\mathbf{V}_k = \nabla\Psi_k = \frac{\partial\Psi_k}{\partial r}\mathbf{n}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_k}{\partial\theta}\mathbf{n}_\theta =$$

$$= C_k r^{k-1}\exp(st)\left[kY_{km}\mathbf{n}_r + \sqrt{k(k+1)}Y_{k(m+1)}\mathbf{n}_\theta\right]. \qquad (7)$$

Определив скалярный квадрат скорости волнового движения и подставив его в (3), найдем

$$E_k = \rho C_k^2 \exp(2st)\int_v \left[k^2 Y_{km}^2 + k(k+1)Y_{k(m+1)}^2\right] r^{2k}\,dr\,d\Omega, \qquad (8)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла в сферической системе координат. После интегрирования по радиальной координате по объему сфероида под интегралом появится множитель $(2k+1)^{-1}r(\theta)^{2k+1}$, где $r(\theta)$ определяется соотношением (5) (или (5а)). Для слабосфероидальной капли (с $e^2 \ll 1$) множитель $r(\theta)^{2k+1}$ представим в линейном по e^2 прибилжении в виде разложения

$$r(\theta)^{2k+1} \approx R^{2k+1}\left[1 + \frac{e^2}{6}(2k+1)(3\cos^2\theta - 1)\right]. \qquad (9)$$

Подставляя это выражение в интеграл для вычисления E_k, получим в пренебрежении взаимодействием между модами с различными значениями k:

$$E_k = \rho C_k^2 \exp(2st) R^{2k+1} k\left\{1 + \frac{e^2}{6}\left[k(3\lambda_{km} - 1) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (k+1)(3\lambda_{k(m+1)} - 1)\right]\right\};$$

$$\lambda_{km} = \frac{2k^2 + 2k - 2m - 1}{(2k-1)(2k+1)}. \qquad (10)$$

3. Вычислим скорость диссипации энергии k-й моды капиллярных колебаний слабосфероидальной капли по формуле (2), которая в сферической системе координат после подстановки в нее выражения (6) для вектора нормали к сфероидальной поверхности принимает вид

$$W_k = -\mu \oint_s \left[\frac{\partial}{\partial r} (\nabla \Psi_k)^2 + e^2 \sin\theta \cos\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \Psi_k)^2 \right] \frac{r^2 d\Omega}{\cos\gamma}, \tag{11}$$

где γ — угол между вектором нормали $\mathbf{n}$ к сфероидальной поверхности и ортом $\mathbf{n}_r$ [7].

Подставим сюда выражение (9) для скорости волнового движения жидкости k-й моды. Учтем, что интеграл (11) берется по сфероидальной поверхности, т.е. что $r = r(\theta)$, где $r(\theta)$ определяется выражением (5) (или (5a)). Используя при вычислении интеграла разложение по квадрату эксцентриситета типа (9), окончательно получим в линейном по e^2 приближении в пренебрежении взаимодействия между модами:

$$W_k = -\mu C_k^2 R^{2k-1} 2k(k-1)(2k+1) \times$$
$$\times \left\{ 1 + \frac{e^2}{6} \Big[2(k-1)(3\lambda_{km} - 1) - \beta_k \Big] \right\}, \tag{12}$$

$$\beta_k = \frac{2(2k-1)(k^2-1) + 6(k+1)(2k^2+k-3)}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)(k-1)}.$$

4. Подставим (10) и (12) в формулу (1) и для декремента затухания k-й моды получим:

$$\eta = \eta_0 \left\{ 1 - e^2 \frac{(4k^4 + 4k^3 + k^2 - 4k - 5)}{3(2k-1)(2k+1)(2k+3)(k-1)} \right\}, \tag{13}$$

где

$$\eta_0 = \frac{\mu}{\rho R^2}(k-1)(2k+1)$$

есть хорошо известный [3] декремент затухания k-й моды капиллярных колебаний сферической капли маловязкой жидкости.

Несложно видеть, что с увеличением эксцентриситета сфероидальной капли декременты неустойчивости всех мод ее капиллярных колебаний снижаются. Этот результат согласуется с тем фактом, что вытягивание капли приближает ее к состоянию неустойчивости (к разрыву на части), которая реализуется, когда полная (комплексная $s = \eta + i\omega$) частота проходит через ноль. В самом деле, из численных расчетов различных типов неустойчивости поверхности жидкости (см., например, [8–9]) следует, что при приближении к состоянию неустойчивости капиллярное волновое движение прекращается, а декремент неустойчивой моды уменьшается до нуля.

Из (13) также видно, что с увеличением номера моды при фиксированном эксцентриситете величина поправки к декременту затухания, связанная со сфероидальностью капли, уменьшается. Однако весь диапазон изменения поправки при варьировании k невелик: от $87/315$ при $k = 2$ до $1/6$ при $k \gg 2$.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // МЖГ. 1994. № 4. С. 3–22.

[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 6. С. 27–34.

[3] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.-Л.: Гостехтеориздат. 1947. 928 с.

[4] *Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.

[6] *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э.* и др. Метод скаляризации векторных краевых задач // Препринт № 27. ИМ РАН. Ярославль, 1994. 128 с.

[7] *Hendrics C.D., Schneider J.M.* // J. Amer. Phys. 1963. V. 1. N 6. P. 450–453.

[8] *Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. № 9. С. 12–21.

[9] *Григорьев О.А.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. № 24. С. 7–11.

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 11 апреля 1995 г.