01;09

ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ, ВОССТАНОВЛЕННЫХ ПО ДАННЫМ КОНЕЧНОЙ ТОЧНОСТИ И ДЛИНЫ

А.А.Кипчатов

Корреляционная размерность D_c [1] — одна из самых распространенных количественных характеристик сложных и хаотических колебаний, которая может быть легко вычислена по любым достаточно длинным временны́м реализациям модельных или реальных колебательных процессов. Величина корреляционной размерности определяет топологическую сложность аттрактора, а ее ограниченность свидетельствует о динамическом происхождении колебаний.

Вычисляется корреляционная размерность для точечных множеств, представляющих аттрактор в истинном фазовом пространстве динамических систем или в псевдофазовом пространстве, восстановленном по скалярной временно́й реализации ξ_i методом временны́х задержек Рюэля–Такенса [2]. Трудности оценки корреляционной размерности связаны с правильностью выбора комплекса параметров алгоритмов восстановления и оценки размерности, таких как: точность временны́х отсчетов, частота дискретизации колебаний, длина временно́й реализации, время восстановления и размерность вложения. Определение этих параметров является одной из важнейших задач количественного анализа хаотических колебаний. Выбору параметров восстановления (τ — время восстановления, d_E — размерность вложения) посвящено много работ (см., например, [3–9]). Настоящая работа фокусируется на проблеме определения достаточного количества точек для достоверного вычисления корреляционной размерности, и поэтому далее предполагается, что размерность вычисляется для аттракторов, представленных в псевдофазовом пространстве корректно.

В соответствии с [1] корреляционной размерностью является число, соответствующее наклону корреляционного интеграла $C(\varepsilon)$ при бесконечном разрешении, т.е. $D_c = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$, где ε — некий пространственный масштаб. Ясно, что бесконечная точность представления данных аттрактора и бесконечное число его точек, как это требует определение D_c, недостижимы. Поэтому вычисления проводятся при больших N и малых ε, а обоснованием достоверности полученных результатов часто являются сами результаты.

Оценке необходимого числа точек для достоверного вычисления корреляционной размерности посвящен ряд работ [6–15]. Наиболее широко известны оценки, сводящиеся к простым соотношениям, а именно: оценка вида $N = 41^{D_c}$ [10], основанная на анализе краевых эффектов, и оптимистическая оценка Экмана и Рюэля вида $N > 10^{D_c/c}$ [14], основанная на выборе конечного значения ε. Вообще говоря, величина размерности неразрывно связана с величиной ε, так как она характеризует не столько аттрактор, сколько отношение наблюдателя к его топологическим свойствам. И в последнее время получил распространение метод оценки локального наклона $\log C(\varepsilon)$ и представления размерности как функции $D_c(\varepsilon)$, т.е. $D_c(\varepsilon) = \frac{d(\log C(\varepsilon))}{d(\log \varepsilon)}$. На практике $D_c(\varepsilon)$ вычисляется по локальному наклону корреляционной функции $C(\varepsilon)$ на конечных интервалах $\delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, а именно $D_c(\varepsilon) = \frac{\log(C(\varepsilon)/C(\varepsilon+\delta))}{\log(\varepsilon/(\varepsilon+\delta))}$. Такой подход не только избавляет исследователей от стыда за недостижимость бесконечно малых ε, но и имеет привлекательный физический смысл — размерность становится функцией масштаба наблюдения или степенью разрешения аттрактора.

Конечная точность исходной временно́й реализации (за счет неизбежных аддитивных шумов или за счет конечноразрядного аналого-цифрового преобразования) принципиально ограничивает возможность оценок размерности при $\varepsilon \to 0$, даже когда $N \to \infty$. В этом случае наименьшая различимая величина изменения значения временно́й реализации может быть записана в двоичном виде как $\Delta\xi = A_0 2^{-b}$, где b — число значимых двоичных разрядов в представлении данных, A_0 — максимальное значение переменной ξ_i. Если по временно́й реализации, отсчеты которой определены с шагом по амплитуде $\Delta\xi$, восстановить аттрактор, то его точки в псевдофазовом пространстве лягут в узлы решетки, имеющей шаг, равный $\Delta\xi$. Фазовое пространство в этом случае становится дискретным. Следовательно, минимальная величина $\varepsilon_{\min}$ (нормированная на размер аттрактора), при которой еще имеет смысл корреляционный интеграл $C(\varepsilon)$, равна

$$\varepsilon_{\min} = 2^{-b}. \tag{1}$$

В соответствии с (1) на рис. 1 нанесены вертикальные линии, ограничивающие доступный диапазон малых масштабов наблюдения, левее которых $C(\varepsilon)$ обусловлен шумами или вообще не определен.

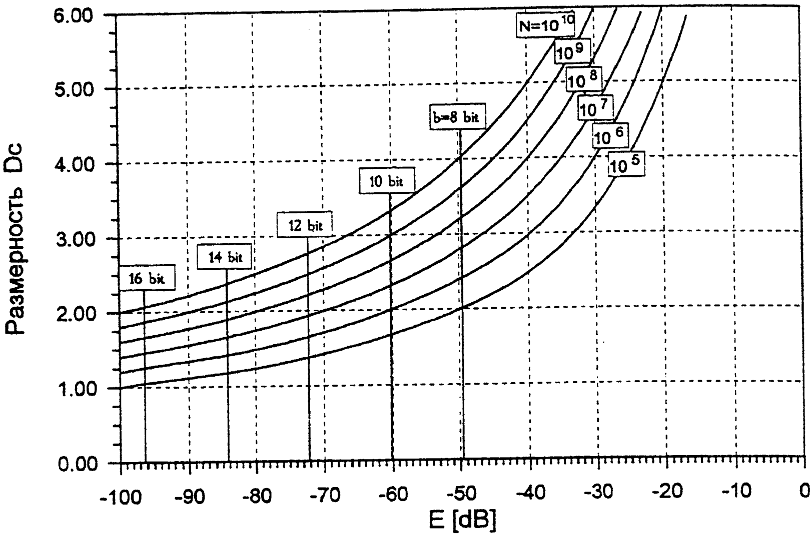

Рис. 1. Область достоверных значений корреляционной размерности как функции масштаба наблюдения ($E = 20\log_{10}(\varepsilon/\varepsilon_0)\,[\mathrm{dB}]$) в зависимости от точности данных b и длины реализации N.

Конечная длина временно́й реализации также ограничивает доступный диапазон масштаба наблюдения ε снизу. Для оценки достаточного количества точек удобно рассматривать однородные множества. Пусть имеется некоторое точечное множество R, представляющее m-мерный равномерно заполненный гиперкуб единичного размера, содержащий N точек, тогда точки расположены с шагом

$$\gamma = N^{-1/m}. \tag{2}$$

Из (2) при формальной замене $m \to D_c'$, обобщающей соотношение на случай дробной размерности оцениваемого множества, вытекает предельная размерность как функция масштаба наблюдения $\varepsilon_{\min}$, которая может быть вычислена по конечному числу точек N, если положить $\gamma = \varepsilon_{\min}$:

$$D_c'(N, \varepsilon_{\min}) = \frac{\log N}{\log(1/\varepsilon_{\min})}. \tag{3}$$

Семейство зависимостей $D_c'(N, \varepsilon_{\min})$ для различного числа точек N представлено на рис. 1 в виде линий, ограничиваю-

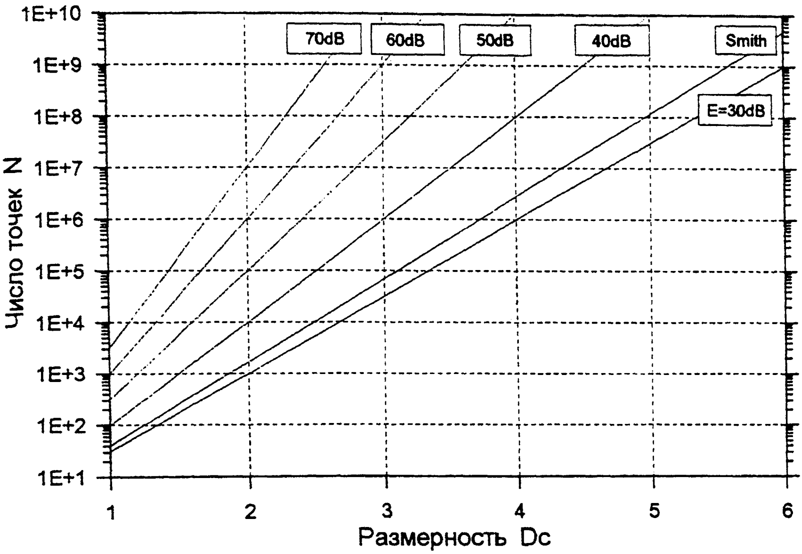

Рис. 2. Число точек, требуемое для оценки размерности аттракторов при различных масштабах наблюдения ε.

щих диапазон достоверных оценок размерности сверху. Полученный вид зависимости $D'_c(N, \varepsilon_{\min})$ дает возможность надеяться, что при больших ε легко можно оценить достаточно большие размерности. Однако это не так. При увеличении ε существенную роль начинают играть краевые эффекты, суть которых в следующем. Число точек n, попавших в некий m-мерный измерительный гиперкуб P со стороной ε, будет пропорционально его объему, т. е. $n = N\varepsilon^m$, если $P \subset R$. При возрастании ε гиперкуб P будет с большой вероятностью лишь частично покрывать R и пропорциональность нарушится. Так как по определению $C(\varepsilon) = \langle n(\varepsilon)\rangle / N$, то можно записать корреляционную размерность в явном виде

$$D_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 1, \\ m, & \gamma < \varepsilon < 1, \\ \delta(\gamma), & \varepsilon < \gamma, \end{cases} \tag{4}$$

где $\delta(\gamma)$ — δ-функция, которая появляется за счет разрыва в корреляционной функции $C(\varepsilon)$ при $\varepsilon = \gamma$. Отсюда следует, что при больших масштабах наблюдения множество будет видно как единая точка ($D_c = 0$). Скорость спада $D_c(N, \varepsilon)$ при возрастании ε определяется влиянием близости краев множества и их формой [7,10,12]. Но форма аттрактора не является универсальной, и смысл имеет лишь оценка топологических свойств его локальной структуры. Следовательно, наилучшие оценки будут получены при наименьших реально достижимых ε, т. е. в точках пересечения двух семейств ограничивающих линий. Тогда из (3) и (1) следует

$$N = 2^{bD_c}. \tag{5}$$

Отличие (5) от оценки [10] состоит в том, что (5) дает значение необходимого числа точек для вычисления размерности при минимальных ε, а [10] — для максимальных масштабов наблюдения ε, при которых роль краевых эффектов незначительна. Зависимости $N(D_c)$ для различных масштабов наблюдения представлены на рис. 2, здесь же приведена оценка Смита [10].

Выражение (5) позволяет определить требуемое число точек, по которым гарантийно можно оценить ожидаемую размерность в заданном диапазоне масштаба наблюдения, если аттрактор восстановлен таким образом, что точки наиболее равномерно расположены во всем фазовом пространстве при минимальных временах восстановления τ [3] и восстановление сохраняет свойства однозначности при минимальной размерности вложения, равной округленной до ближайшего большего целого величине фрактальной размерности [6,8]. Более того, вышеприведенные оценки демонстрируют, что представление данных в виде 12–16 разрядных целых чисел будет достаточно для оценки размерности любых последовательностей обозримой длины.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95–02–06262а).

Список литературы

[1] *Grassberger P., Procaccia I.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 5. P. 346–349.

[2] *Takens F.* // Dynamical Systems and Bifurcations / Ed. by Braaksma B.L.J. et al. Berlin: Springer, 1984. P. 99–106.

[3] *Buzug T., Pfister G.* // Physica D. 1992. V. 58. P. 127–137.

[4] *Zbilut J.P., Webber Jr C.L.* // Phys. Lett. A. 1992. V. 171. P. 199–203.

[5] *Кипчатов А.А., Красичков Л.В.* // Письма в ЖТФ. Т. 21. Вып. 3.

[6] *Ding M., Grebogi C.* et al. // Physica D. 1993. V. 69. P. 404–424.

[7] *Drazin P.G., King G.P.* // Physica D. 1992. V. 58. P. vii–vi.

[8] *Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M.* // J. of Stat. Phys. 1991. V. 65. N 3/4. P. 579–616.

[9] *Sauer T., Yorke J.A.* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1993. V. 3. N 3. P. 737–744.

[10] *Smith L.A.* // Phys. Lett. A. 1988. V. 133. N 6. P. 283–288.
[11] *Theiler J.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. N 6. P. 3038–3051.
[12] *Farmer D.J., Ott E., Yorke J.A.* // Physica D. 1983. V. 7. P. 153.
[13] *Nerenberg M.A. H., Essex C.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 42. N 12. P. 7065–7074.
[14] *Eckman J.-P., Ruelle D.* // Physica D. 1992. V. 56. P. 185–187.
[15] *Gershenfeld N.A.* // Physica D. 1992. V. 55. P. 135–154.

Саратовский
государственный университет

Поступило в Редакцию
20 апреля 1995 г.