Письма в ЖТФ, том 21, вып. 15 12 августа 1995 г.

01

О НЕКОТОРЫХ ПРИНЦИПАХ ПОСТРОЕНИЯ МАЛОМОДОВЫХ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Н.М.Зубарев

Теорема Рюэля–Такенса [1] о том, что переход к хаосу в динамических системах может происходить через конечное число бифуркаций, обусловила интерес к конечномерным моделям в описании ламинарно-турбулентного перехода в системах с распределенными параметрами. Однако то, насколько точно та или иная модель аппроксимирует исходные уравнения в частных производных, не всегда берется за критерий качества модели и часто заменяется неоднозначным понятием ее полезности. В данной работе предлагается метод построения конечномерных моделей, обобщающий метод Галеркина [2] и основанный на минимизации интеграла от квадрата невязки вдоль фазовой траектории динамической системы, т. е. на принципе наибольшего соответствия модели исходным уравнениям. В качестве примера использования метода построена модификация модели Лоренца [3] для системы Зальцмана [4].

Рассматривается уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \mathbf{r}, u\right), \qquad (1)$$

где $\mathbf{r} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — пространственная координата. Зададим на области определения V функции u скалярное произведение как $(f(\mathbf{r}), g(\mathbf{r})) = \int_V f(\mathbf{r})g(\mathbf{r})\,dV$. Будем искать приближенное решение (1) в виде

$$u = u_n = \sum_{i=1}^{n} A_i(t)H_i(\mathbf{r}), \qquad (2)$$

где пробные функции H_i удовлетворяют соответствующим физике исследуемого явления граничным условиям, и, кроме того, пусть для них справедливо $(H_i, H_j) \neq 0$, только если $i = j$, т. е. они ортогональны. Введем теперь невязку

$$N(\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{A}, \mathbf{r}) = \frac{\partial u_n}{\partial t} - F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \mathbf{r}, u_n\right),$$

где $\mathbf{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Получаемая из требований ортогональности невязки пробным функциям (методом Галеркина [2]) система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на амплитуды $A_1, \ldots, A_n$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = \mathbf{f}(\mathbf{A}), \tag{3}$$

где $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — в общем случае нелинейные функции амплитуд.

В этой работе предлагается строить системы ОДУ из соображений минимальности на траектории функционала: $S = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}(N,N)\,dt$, где t_0 — текущее время, а ε — величина временно́го интервала, на котором производится минимизация. Обозначая поправки к уравнениям (3): B_i $(i = 1, \ldots, n)$, запишем скалярное произведение (N,N) в виде:

$$L(\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{A}) \equiv (N,N) = C(\mathbf{A}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i^2,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — положительные коэффициенты, которые можно считать равными единице при соответствующей нормировке пробных функций, а функция $C(\mathbf{A}) \geqslant 0$ отражает неточность приближения (3). Задача минимизации функционала S с одним подвижным концом сводится к решению системы ОДУ

$$\frac{d}{dt}A_i = f_i(\mathbf{A}) + B_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}B_i = \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial B_j}{\partial A_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial C(\mathbf{A})}{\partial A_i}, \quad B_i(t_0+\varepsilon) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Видно, что при $C = 0$ решением уравнений (5) будет $\mathbf{B} = \{B_1, \ldots, B_n\} = 0$, и в этом частном случае система (3) оптимальна.

Будем искать решение (5) в виде ряда

$$B_i(t) = (t - t_0 - \varepsilon)B_i^{(1)}(t) + \frac{(t - t_0 - \varepsilon)^2}{2}B_i^{(2)}(t) + \ldots, \quad i = 1, \ldots, n,$$

Тогда подстановкой получаем при $t \to t_0 + \varepsilon$

$$B_i^{(1)}(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial C(\mathbf{A})}{\partial A_i},$$

$$B_i^{(2)}(t) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial C}{\partial A_j} f_j\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Считая, что ε мало, вспоминая также, что t_0 — текущее время, и, следовательно, полагая $t = t_0$ в выражениях для $B_i^{(2)}$ и $B_i^{(1)}$, получаем систему ОДУ (здесь ограничимся лишь линейными и квадратичными членами по ε):

$$\frac{d}{dt}A_i = f_i(\mathbf{A}) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial C(\mathbf{A})}{\partial A_i} - \frac{\varepsilon^2}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial C}{\partial A_j}f_j\right) + O(\varepsilon^3), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Следует отметить, что если изменение фазового объема системы (4) задавалось выражением $\nabla \cdot \mathbf{f}$, то для системы (6) с учетом только линейных по ε членов — выражением $\nabla \cdot \mathbf{f} - (1/2)\varepsilon\Delta C$, где $\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 C}{\partial A_i^2}$. Ясно, что если структура исходного уравнения (1) такова, что при подстановке (2) в его правой части остаются лишь перекрестные члены, то $\varepsilon\Delta C \geqslant 0$ и фазовый объем системы (6) сжимается быстрее, чем системы (3). Это связано с тем, что предлагаемый в этой работе алгоритм построения маломодовых моделей позволяет учитывать диффузию энергии в моды, не входящие в (2).

Применение предлагаемого метода получения маломодовых моделей к системе уравнений Зальцмана, возникающей в ряде задач при описании начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода (возникновение валов Бенара [4], стратификация жидкометаллического проводника с током [5,6] и т. д.), с помощью известной подстановки Лоренца [3] дает функцию L в виде

$$L(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, X, Y, Z) = c^{-1}(\dot{X} - \sigma Y + \sigma X)^2 + (\dot{Y} - rX + XZ + Y)^2 + (\dot{Z} - XY + bZ)^2 + X^2Z^2,$$

где σ, b, r — параметры, введенные в [3], $c = \sigma^2/(\sigma + \lambda)^2$, λ — показатель наиболее быстрой моды, а коэффициент при первом члене в правой части данного выражения выбран так, чтобы при малых амплитудах X, Y, Z вклад обоих уравнений системы Зальцмана [4] в функцию L был бы эквивалентен.

Пользуясь (6), получим с точностью до квадратичных по ε членов

$$\dot{X} = \sigma(Y - X) - c\varepsilon\Big(XZ^2(1 - \varepsilon\sigma - \varepsilon b) + \varepsilon YZ(\sigma Z + (2 + 1/c)X^2)/2\Big),$$

$$\dot{Y} = rX - XZ - Y - \varepsilon^2 XZ(X^2 + c\sigma Z)/2,$$

$$\dot{Z} = XY - bZ - \varepsilon\Big(ZX^2(1 - \varepsilon b - \varepsilon\sigma) + \varepsilon YX(X^2 + 2\sigma Z)/2\Big).$$

При $\varepsilon = 0$ эта система превращается в модель Лоренца [3], а при других значениях этого параметра отлична от нее. При этом ее фазовый объем сжимается быстрее, чем для модели Лоренца. Так, с увеличением интервала оптимизации невязки ε при параметрах модели $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$ странный аттрактор Лоренца вырождается в предельный цикл, а затем в точку. Как уже указывалось, такое упрощение динамики амплитуд связано с эффективной диффузией энергии в моды более высокого порядка, что не учитывается в рамках метода Галеркина и, следовательно, в модели Лоренца. При этом такая характеризующая качество модели величина, как $\int_{T_0}^{T_1} L\,dt$ (первый предел интегрирования T_0 выбирается таким образом, что система уже выходит на аттрактор), при $\varepsilon \approx 0.01$ почти на четверть меньше, чем при $\varepsilon = 0$.

Таким образом, предложен метод построения маломодовых моделей, обобщающий метод Галеркина; с его использованием была построена модификация модели Лоренца для системы Зальцмана, обеспечивающая значительно меньшую невязку, чем модель Лоренца.

В заключение считаю своим долгом поблагодарить Н.Б. Волкова за предложение заняться этой темой и А.М. Искольдского за стимулирующие обсуждения. Данная работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 94-02-06654-а.

Список литературы

[1] *Ruelle D., Takens F.* // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167.
[2] *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
[3] *Lorenz E.N.* // J.Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130.
[4] *Saltzman B.* // J. Atmos. Sci. 1962. V. 19. P. 329.
[5] *Волков Н.Б., Искольдский А.М.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 24. С. 71.
[6] *Волков Н.Б., Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1995 (принято к публикации).

Институт электрофизики
УО РАН
Екатеринбург

Поступило в Редакцию
7 апреля 1995 г.