Письма в ЖТФ, том 21, вып. 14 26 июля 1995 г.

07

ДИФРАКЦИОННАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ПЕРЕКРЕСТНЫЕ ПОМЕХИ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ОБЪЕМНЫХ НАЛОЖЕННЫХ ГОЛОГРАММ

В.В.Орлов

Известно, что объемные наложенные голограммы, записанные двумя полными системами ортонормированных волновых полей, не содержат интермодуляционных решеток диэлектрической проницаемости, обусловленных интерференцией опорных и объектных волновых полей самих с собой [1]. Согласно модовой теории объемных голограмм [2], такие голограммы восстанавливают волновые поля без искажений и имеют 100%-ю дифракционную эффективность [3]. В настоящей работе исследованы объемные наложенные фазовые пропускающие голограммы, записанные взаимно ортонормированными опорными волновыми полями и произвольными объектными волновыми полями, не ограниченными условием их взаимной ортогональности. Ранее, в работе [4], были исследованы объемные наложенные голограммы, записанные объектными волновыми полями, почти ортогональными друг другу, т. е. волновыми полями, модуль скалярного произведения комплексных амплитуд которых намного меньше интенсивности волновых полей. В работе [4] перекрестные помехи рассматривались как результат дифракции на интермодуляционных решетках голограмм. В настоящей работе предполагается, что у голограмм отсутствуют интермодуляционные решетки диэлектрической проницаемости. Такие голограммы могут быть получены, если при их записи используется регистрирующая среда, не чувствительная к низким пространственным частотам интермодуляционной интерференционной картины, возникающей при регистрации голограмм. Нами рассмотрены перекрестные помехи, возникающие в результате дифракции на кроссмодуляционных решетках голограмм, обусловленных интерференцией опорных и объектных волновых полей друг с другом. Отметим, что в работе не рассматриваются шумы, обусловленные дифракцией волновых полей на тех решетках, в записи которых они не участвовали. Данный вид шумов объемных наложенных голограмм рассмотрен в работе [5]. Им можно пренебречь, если углы между плоскими компонентами опорных и объектных волновых полей намного превышают угловую селективность голограмм.

Предположим, что с использованием K опорных и $N-K$ объектных точечных источников, волновые поля которых в области записи голограмм представляют собой плоские волны, записывается M наложенных голограмм. Комплексные амплитуды опорных и объектных волновых полей можно представить в виде двух матриц

$$\hat{A} = (a_{mn}), \quad m = 1, \ldots, M, \quad n = 1, \ldots, K,$$

$$\hat{B} = (b_{mn}), \quad m = 1, \ldots, M, \quad n = K+1, \ldots, N, \tag{1}$$

где матрица $\hat{A}$ описывает опорные волны, матрица $\hat{B}$ — объектные. Элемент матриц $\hat{A}$ или $\hat{B}$ с индексом mn описывает комплексную амплитуду n-й плоской волны во время записи m-й наложенной голограммы. Пусть опорные волновые поля ортонормированны

$$\sum_{I=1}^{K} a_{pI} a_{qI}^{*} = Q\delta_{pq}, \tag{2}$$

где δ_{pq} — символ Кронекера, Q — интенсивность опорных волновых полей. Рассматривая полученную совокупность наложенных голограмм согласно модовой теории объемных голограмм [2], можно показать, что каждой из M наложенных голограмм соответствует две моды волновых полей голограммы $\mathbf{\Lambda}_{p(+)}$ и $\mathbf{\Lambda}_{p(-)}$ и два собственных числа $\lambda_{p(+)}$ и $\lambda_{p(-)}$, $p = 1, \ldots, M$ этих мод

$$\mathbf{\Lambda}_{p(\pm)} = \sum_{g=1}^{M} (\pm a_{g1}\sqrt{\tau_p}\, Q^{-1}, \ldots; \pm a_{gK}\sqrt{\tau_p} Q^{-1}, b_{g,K+1}, \ldots, b_{gN}) r_g^p,$$

$$\lambda_{p(\pm)} = C \pm \sqrt{\tau_p}, \tag{3}$$

где C — постоянная, зависящая от средней экспозиции регистрирующей среды. Как следует из (3), мода p-й наложенной голограммы имеет N компонент и представляет собой суперпозицию комплексных амплитуд опорных и объектных волновых полей всех наложенных голограмм. При этом коэффициенты, с которыми различные волновые поля входят в эту суперпозицию, определяются собственным вектором $\mathbf{R}^p(r_1^p, \ldots, r_M^p)$ и собственным числом τ_p матрицы $Q\hat{G}$

$$Q\hat{G}\mathbf{R}^p = \tau_p \mathbf{R}^p, \tag{4}$$

где $\hat{G}$ — матрица Грама комплексных амплитуд объектных волновых полей

$$\hat{G} = (g_{Ij}), \quad I, j = 1, \ldots, M,$$
$$q_{Ij} = \mathbf{B}_I \mathbf{B}_j^* = \sum_{n=k+1}^{N} b_{In} b^* jn \tag{5}$$

и $Q\hat{G}$ — матрица, равная произведению матрицы $\hat{G}$ на интенсивность опорных пучков Q. Вектор $\mathbf{B}_I(b_{I1}, \ldots, b_{IN})$ в (5) определяется комплексными амплитудами объектного волнового поля I-й наложенной голограммы и представляет собой I-ю вектор-строку матрицы $\hat{B}$ (1).

При восстановлении j-й наложенной голограммы в качестве граничного условия необходимо задать на первой поверхности голограммы опорное волновое поле этой голограммы $\mathbf{A}_j(a_{j1}, \ldots, a_{jK})$, где $\mathbf{A}_j$ представляет собой j-ю вектор-строку матрицы $\hat{A}$ (1). Для этого сначала формируются волновые поля

$$\mathbf{L}_p = \frac{1}{2}\left(\mathbf{\Lambda}_{p(+)} - \mathbf{\Lambda}_{p(-)}\right), \tag{6}$$

содержащие компоненты только опорных волн. Опорное волновое поле j-й наложенной голограммы формируется в виде линейной комбинации

$$\mathbf{A}_j = \sum_{p=1}^{M} c_p \mathbf{L}_p, \tag{7}$$

где коэффициенты c_p находятся как решения системы M линейных уравнений

$$\left(\sqrt{\tau_1} r_q^1 c_1 + \sqrt{\tau_2} r_q^2 c_2 + \ldots + \sqrt{\tau_M} r_q^M c_M\right) Q^{-1} = \delta_{qj},$$
$$q = 1, \ldots, M. \tag{8}$$

Рассмотрев в соответствии с модовой теорией объемных голограмм распространение суперпозиции мод (7) внутри голограмм, получим, что на расстоянии z от первой поверхности голограмм опорное $\Psi_A(z)$ и объектное $\Psi_B(z)$ волновые поля имеют вид

$$\Psi_A(z) = \exp(IDCz) Q^{-1} \sum_{p,q}^{M} \cos(D\sqrt{\tau_p} z) \sqrt{\tau_p} r_g^p c_p \mathbf{A}_g,$$
$$\Psi_B(z) = \exp(IDCz) \sum_{p,q}^{M} \sin(D\sqrt{\tau_p} z) r_g^p c_p \mathbf{B}_q, \tag{9}$$

где $D = \frac{k\varkappa\sqrt{\varepsilon}t}{2}$, k — волновое число света в вакууме, ε — диэлектрическая проницаемость регистрирующей среды до экспонирования, $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности между приращением диэлектрической проницаемости и величиной экспозиции, t — время записи каждой из наложенных голограмм, одинаковое для всех голограмм. Как следует из (9), при восстановлении наложенных голограмм опорным волновым полем j-й наложенной голограммы в общем случае восстанавливается не только волновое поле $\mathbf{B}_j$ данной наложенной голограммы, но и объектные волновые поля всех остальных наложенных голограмм. Их следует рассматривать как перекрестные помехи. Процесс восстановления чужих объектных волновых полей состоит в следующем. Если объектное волновое поле j-й наложенной голограммы $\mathbf{B}_j$ не ортогонально объектному волновому полю I-й наложенной голограммы $\mathbf{B}_I$, то поле $\mathbf{B}_j$ восстанавливает опорное волновое поле $\mathbf{A}_I$ I-й наложенной голограммы. В свою очередь опорное волновое поле $\mathbf{A}_I$ восстанавливает соответствующее ему объектное волновое поле $\mathbf{B}_I$.

Рассмотрим два частных случая, в первом из которых перекрестные помехи полностью отсутствуют, а во втором они могут быть сделаны сколь угодно малыми. Пусть объектные волновые поля всех наложенных голограмм взаимно ортогональны $\mathbf{B}_j\mathbf{B}_I^* = |B_j|^2\delta_{jI}$, тогда матрица Грама $\hat{G}$ объектных волновых полей диагональна и собственные вектора $\mathbf{R}^p(r_1^p, \ldots, r_M^p)$ матрицы $Q\hat{G}$ имеют отличной от нуля только одну свою компоненту. При этом, как следует из (9), восстанавливается объектное волновое поле только одной j-й наложенной голограммы и ее дифракционная эффективность может составлять 100%. В данном случае наложенные голограммы близки по своим свойствам к объемным наложенным голограммам, записанным двумя полными системами ортонормированных волновых полей, которые исследовались ранее теоретически [1,3] и экспериментально [6]. Рассматриваемые нами голограммы будут именно такими голограммами, если выполняются условия $K = (N - K) = M$ и $|\mathbf{B}_j|^2 = |\mathbf{B}_I|^2$ при $j \neq I$.

Предположим теперь, что объектные волновые поля произвольны и дифракционная эффективность голограмм мала, что имеет место при их небольшой толщине z

$$z \ll \frac{\Pi}{2D\sqrt{\tau_p}}, \qquad p = 1, \ldots, M. \tag{10}$$

Тогда в первом приближении восстанавливается объектное волновое поле только одной j-й наложенной голограммы. Действительно, в этом случае при разложении в (9)

$\sin(D\sqrt{\tau_p}z)$ в ряд $\sin(D\sqrt{\tau_p}z) = D\sqrt{\tau_p}z - \frac{1}{6}(D\sqrt{\tau_p}z)^3 + \ldots$ можно ограничиться лишь первым членом разложения. При этом все коэффициенты, с которыми различные объектные волновые поля входят в суперпозицию (9), согласно (8) равны нулю, кроме коэффициента при j-м волновом поле, равном QDz. Учет последующих членов разложения позволяет найти волновые поля перекрестных помех и сравнить их интенсивность с интенсивностью восстановленного волнового поля j-й наложенной голограммы.

Отметим, что при выводе соотношений (9) предполагалось, что объектные волновые поля всех наложенных голограмм линейно независимы, для чего необходимо выполнение условия $M \leqslant N - K$. На основе соотношений (9) могут быть рассчитаны дифракционные эффективности объемных наложенных голограмм и возникающие при их восстановлении перекрестные помехи в зависимости от параметров объектных волновых полей τ_p, $\mathbf{R}^p$, $p = 1, \ldots, M$, зависящих от содержащейся в этих полях информации и от параметров z, D, зависящих от характеристик регистрирующей среды и процесса ее экспонирования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95–02–03887-А), а также Международного научного фонда (грант MU-4000).

Список литературы

[1] *Орлов В.В.* // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 9–12.
[2] *Сидорович В.Г.* // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 6. С. 1306–1312.
[3] *Орлов В.В.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 8. С. 117–127.
[4] *Зельдович Я.Б., Шкунов В.В., Яковлева Т.В.* // Проблемы оптической голографии. Л., 1981. С. 80–97.
[5] *Bashaw M.C., Heanue J.F., Aharoni A.* et al. // JOSA B. 1994. V. 11. N 9. P. 1820–1836.
[6] *Орлов В.В., Булыгин А.Р.* // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 1. С. 3–6.

Всероссийский научный центр
"ГОИ" им. С.И. Вавилова"
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
10 мая 1995 г.