01;10

СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАКСИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Ю.К.Голиков, В.Г.Кудрявин

В данной работе предлагаются методы получения полных решений, одинаково применимые как к планарному параксиальному уравнению, так и к уравнению для поля с вращательной симметрией. Поэтому мы ограничимся проведением преобразований и приведением результатов только для практически более значимого случая полей с вращательной симметрией, в которых уравнение приосевых траекторий [1] имеет вид

$$4fy'' + 2f'y' + f''y = 0. \tag{1}$$

Выразим распределение потенциала вдоль оси симметрии поля $f(x)$ и частное решение $y_1(x)$, ему сответствующее, через функции $a(x)$, $b(x)$, $v(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \exp\left(\int v(x)dx\right), \tag{2}$$

$$y_1(x) = \exp\left(\int a(x)dx\right) \cdot \sin\left(\int b(x)dx\right). \tag{3}$$

После подстановки (2) в (1) получим

$$(4a' + v' + 4a^2 - 4b^2 + 2va + v^2) \cdot \sin\left(\int b(x)dx\right) +$$

$$+ (4b' + 8ab + 2vb) \cos\left(\int b(x)dx\right) = 0. \tag{4}$$

Связав $a(x)$, $b(x)$, $v(x)$ условием обращения в ноль обеих скобок одновременно, получим систему

$$\begin{cases} 4a' + v' + 4a^2 + 2av + v^2 - 4b^2 = 0, \\ 4b' + 8ab + 2vb = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Можно показать, что в случае, когда $a(x)$, $b(x)$, $v(x)$ удовлетворяют системе (5), получаемое посредством вронскиана

[2] второе линейно независимое решение $y_2(x)$ будет иметь вид

$$y_2(x) = \exp\left(\int a(x)dx\right) \cdot \cos\left(\int b(x)\mathrm{dx}\right). \tag{6}$$

Полное решение $y(x)$ будет выражаться через $y_1(x)$ и $y_2(x)$ следующей формулой:

$$y(x) = \exp\left(\int a(x)dx\right)\times$$

$$\times\left\{C_1 \sin\left(\int b(x)dx\right) + C_2 \cos\left(\int b(x)dx\right)\right\}. \tag{7}$$

Синтез $f(x)$ и соответствующего ему полного решения $y(x)$ сводится, таким образом, к нахождению трех функций, удовлетворяющих системе (5).

Способ 1

В системе (5) проведем замену следующего вида:

$$v(x) = s(x) = 4a(x). \tag{8}$$

Получим

$$\begin{cases} s' + s^2 + 12a^2 - 6as - 4b^2 = 0, & (9) \\ b' = -bs/2. & (10) \end{cases}$$

Пусть в некоторой области $x(b)$ фунция однозначная, тогда можно перейти от дифференцирования по x к дифференцированию по параметру b:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{ds}{ab}sb + s^2 + 12a^2 - 6as - 4b^2 = 0, & (11) \\ dx = -\dfrac{2db}{bs(b)}. & (12) \end{cases}$$

Уравнение (12) может быть проинтегрировано, а уравнение (11) может быть разрешено:

$$\begin{cases} x(b) = -2\displaystyle\int \frac{db}{bs(b)}, & (13) \\ a(b) \doteq \dfrac{3s(b) + b(-3(s^2(b)/b)' + 48)^{1/2}}{12}, & (14) \end{cases}$$

где $s(b)$ — произвольная функция.

Тогда с учетом (8), после замены интегрирования по x интегрированием по параметру b формулы (2) и (7) примут вид

$$f(b) = \exp\left(2\int \frac{4a(b) - s(b)}{bs(b)}db\right), \tag{15}$$

$$y(b) = \exp\left(-2\int \frac{a(b)}{bs(b)}db\right)\times$$

$$\times\left\{C_1 \sin\left(2\int \frac{db}{s(b)}\right) + C_2 \cos\left(2\int \frac{db}{s(b)}\right)\right\}, \tag{16}$$

где $a(b)$ выражается формулой (14).

Задавая $s(b)$ в виде различных функций, содержащих в своей структуре свободные параметры, получим широкий класс решений уравнения (1), который может быть использован при решении оптимизационных задач. По сравнению с результатами работы [3] данная форма решений выгодно отличается простотой представления полного решения $y(x)$.

Для практического использования наиболее удобны решения уравнения (1), представимые в виде комбинаций элементарных функций.

Способ 2

Обратимся к системе (5) и наложим дополнительную связь

$$4a(x) + v(x) = b(x)p(x), \tag{17}$$

$$a(x) = b(x)q(x), \tag{18}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — произвольные пока функции. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} b'p + p'b = b^2(4 + 6pq - 12q^2 - p^2), & (19)\\ b' = -\dfrac{bp^2}{2}. & (20)\end{cases}$$

Проведем замену

$$r(x) \doteq 1/b(x), \tag{21}$$

$$\begin{cases} p'r = 4 + 6pq - 12q^2 - p^2/2, & (22)\\ r' = p/2. & (23)\end{cases}$$

Пусть $q = q(p)$. Введем обозначение

$$L = 8 + 12pq - 24q^2 - p^2, \tag{24}$$

$$\begin{cases} r\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{L}{2}, & (25) \\ \dfrac{dr}{dx} = \dfrac{p}{2}. & (26) \end{cases}$$

Разделив (26) на (25), получим

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dp} = \frac{p}{L(p)}. \tag{27}$$

После интегрирования (27) получим

$$r(p) = \frac{1}{b(p)} = \exp\left(\int \frac{p}{l(p)} dp\right). \tag{28}$$

Интегрируя выражение (25) с учетом известного вида $r(p)$ (28), получим связь между x и параметром p:

$$x(p) = 2\int \exp\left(\int \frac{pdp}{L(P)}\right)\frac{dp}{L(p)}. \tag{29}$$

С помощью формул (17) и (18) можно получить выражения для $a(p)$ и $v(p)$:

$$a(p) = q(p)\exp\left(-\int \frac{pdp}{L(p)}\right), \tag{30}$$

$$v(p) = [p - 4q(p)] \cdot \exp\left(-\int \frac{pdp}{L(p)}\right). \tag{31}$$

Подставляя (30), (31), (28) в формулы (2), (7) и переходя к интегрированию по параметру p, получим следующие выражения:

$$f(p) = \exp\left(2\int \frac{p - 4q(p)}{L(p)} dp\right), \tag{32}$$

$$y(p) = \exp\left(2\int \frac{q(p)}{L(p)} dp\right) \times$$

$$\times \left\{C_1 \sin\left(2\int \frac{dp}{L(p)}\right) + C_2 \cos\left(2\int \frac{dp}{L(p)}\right)\right\}, \tag{33}$$

где $L(p)$ определяется формулой (24), а $q(p)$ — произвольно задаваемая функция. Если $q(p)$ выбирать в классе полиномов или рациональных функций, то все интегралы в формулах (32), (33) будут выражаться через элементарные функции. С помощью приведенных выше способов появляется перспектива построения элементарного многопараметрического базиса решений уравнений параксиальных потоков.

Список литературы

[1] *Силадьи М.* Электронная и ионная оптика. М.: Мир, 1990. 638 с.
[2] *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит.,1950. 436 с.
[3] *Голиков Ю.К.* // Тр. ЛПИ. Физическая электроника. 1973. № 328. С. 104–105.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

Поступило в Редакцию 30 января 1995 г.