

01;02
©1995

АННИГИЛЯЦИЯ ПОЗИТРОНОВ ВО ФРАКТАЛЬНЫХ СРЕДАХ

В. Н. Болотов

Все большее значение в теории физических явлений приобретает концепция фрактала [1]. Эта математическая конструкция появляется почти во всех областях физики нелинейных процессов с диссипацией. Связь фракталов с реальными объектами в основном уже доказана. К таким объектам можно отнести пористые тела, шероховатые поверхности, границы трещин и кластеры в твердых телах и т. д. [1].

В данной работе рассмотрена аннигиляция позитронов по фрактальных средах. В таких средах процесс аннигиляции схематически можно представить в виде "чертовой лестницы" [1]. Ее горизонтальные отрезки соответствуют временным интервалам, где аннигиляция не идет. В этом случае будем описывать процесс эволюции с использованием фрактального времени t , которое принадлежит точкам канторова множества [2]. При аннигиляции позитронов в сплошных средах время принадлежит множеству действительных чисел.

Для описания эволюционных процессов с фрактальным временем в работе используется хорошо развитый аппарат дробного дифференцирования и интегрирования [3]. Для плотности позитронов $n(t)$, определенной на канторовом множестве, можно записать дифференциальное уравнение с показателем дробной производной $\nu < 1$. При $\nu = 1$ (сплошная среда) получается известное уравнение распада. Все величины в уравнении безразмерные

$$D^\nu n(t) + n(t) = 0, \quad (1)$$

D^ν — это дробная производная Римана–Лиувилля [3]:

$$D^\nu n(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{n(\xi) d\xi}{(t-\xi)^\nu}. \quad (2)$$

Дробная производная отражает тот факт, что из-за фрактальности среды аннигиляционный процесс идет медленнее первой производной. Экспериментально наблюдаемой

является величина $N(t)$, которая связана простым соотношением с плотностью позитронов $n(t)$. В каком-то смысле это усредненная плотность позитронов

$$N(t) = D^{\nu-1} n(t). \quad (3)$$

При $\nu = 1$ обе плотности совпадают.

Для уравнения (1) решена задача Коши с начальным условием [3]:

$$D^{\nu-1} n(t) |_{t=0} = N_0, \quad (4)$$

где N_0 — начальная плотность позитронов во фрактальной среде.

Решение уравнения (1) с начальным условием (4) имеет вид

$$n(t) = N_0 t^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(-t^\nu), \quad (5)$$

$E_{\nu, \nu}$ — функция Миттаг-Леффлера [4].

Теперь несложно с помощью (3) и (5) получить закон изменения плотности позитронов со временем во фрактальной среде

$$N(t) = N_0 E_\nu(-t^\nu). \quad (6)$$

Таким образом, вероятность обнаружить позитрон во фрактальной среде через время t после его влета в эту среду равна $E_\nu(-t^\nu)$. Это так называемый спектр времени жизни позитронов. При $\nu = 1$ получается обычный закон поведения спектра $\exp(-t)$.

Следует отметить, что число проаннигилировавших позитронов к моменту времени t равно

$$D^{-\nu} N(t) = N_0 [1 - E_\nu(-t^\nu)]. \quad (7)$$

Фактически вычислен дробный интеграл от плотности $N(t)$.

Для времен, гораздо больших характерных времен аннигиляции $t \gg 1$, асимптотическое поведение выражения (6) имеет вид [4]:

$$N(t) \simeq \frac{N_0}{t^\nu \Gamma(1 - \nu)} + O(|t|^{-2\nu}), \quad (8)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция. Как видно из (8), “хвосты” спектров времени жизни позитронов описываются степенной функцией.

Неэкспоненциальная зависимость от времени релаксационных процессов, скоростей химических реакций, аннигиляции является характерной чертой нелинейных диссипативных явлений, которые тесно связаны с концепцией фрактала.

Список литературы

- [1] Федер Е. Фракталы.: Мир, 1991. 260 с.
- [2] Нигматуллин Р.Р. // Теор. и мат. физика. 1992. Т. 90. № 3. С. 354-368.
- [3] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 299 с.

Харьковский государственный
университет

Поступило в Редакцию
14 октября 1995 г.

