Письма в ЖТФ, том 21, вып. 6 26 марта 1995 г.

01;07

К ВОПРОСУ О СДВИГОВОЙ ДЕСТРУКЦИИ СИГНАЛА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДВУМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША–АДАМАРА, РЕАЛИЗОВАННОГО НА МНОГОЭЛЕМЕНТНОМ ФОТОПРИЕМНИКЕ

Б.А.Лифшиц, Б.Г.Подласкин

На протяжении многих лет удерживается устойчивый интерес к использованию различных интегральных преобразований для передачи и обработки оптических сигналов. Этот интерес связан с целым рядом свойств интегральных преобразований, позволяющих совершать оптимальное кодирование и фильтрацию сигналов [1], производить опознавание образцов в спектральной области изображений [2], увеличивать точность и чувствительность оптических систем [3].

Особое место в этих исследованиях занимает преобразование Уолша–Адамара, которое оптимально с точки зрения минимизации среднеквадратических ошибок и их обобщенной вариации и минимизации среднеквадратической ошибки лучшей оценки (*А*, *Д*, *Е* — оптимальность) [4]. В работе [5] показано, что физический смысл этой оптимальности обусловлен полным использованием энергии входного сигнала, что делает преобразование Уолша–Адамара в некотором смысле эквивалентным параллельной системе такой же размерности. В связи с постановкой задачи возможности пространственной фильтрации временного шума были рассмотрены перестановки функций Уолша, порожденные автоморфизмами группы Кантора [6]. Показано, что предложенные средства позволяют локализовать элементы с максимальной дисперсией в разных зонах поля изображения для различных классов спектральных плотностей шума.

В работах [7,8] описаны возможные способы практической реализации преобразования Адамара в устройствах оптической обработки информации как с помощью оптического маскирования изображения, использующего весовые коэффициенты преобразования 0, +1, так и с помощью непосредственного кодирования чувствительности поля многоэлементного фотоприемника, что позволяет реализовать это преобразование с коэффициентами +1, −1 [8]. Разделимость ядра преобразования Адамара делает его удобным для управления коэффициентами чувствительности по полю фотоприемника и дает возможность использовать это преобразование при построении фотоприемников большой размерности, выходным сигналом которых являются коэффициенты разложения входных изображений по функциям Уолша.

Тем не менее, успешное использование многоэлементных адамаровских фотоприемников во многих случаях ограничено нарушением ортогональности преобразования, связанного со сдвигом изображения в процессе его последовательного проецирования на строки фотоприемника. Особое внимание к этой проблеме обусловлено тем, что, в отличие от поэлементного опроса, при котором сдвиг изображения порождает эффект расфокусировки и "смаза", в случае использования интегральных преобразований может происходить полное разрушение изображений и появление ложных сигналов.

Данная работа посвящена разработке подходов к оценке сдвиговой деструкции сигнала при использовании интегрального преобразования Уолша–Адамара и количественной оценке возможных искажений сигнала в частном случае.

Представим себе, что $\gamma(x)$ — одна строка изображения, спроецированного на фотоприемник, и рассмотрим разложение сигнала γ по функциям Уолша $\{h_j\}$ на отрезке [0,1]:

$$\gamma(x) = \sum_n \gamma_n h_n(x), \qquad \gamma_n = \int_0^1 \gamma(x) h_n(x).$$

Если в ходе последовательного вычисления коэффициентов γ_n сигнал γ подвергается сдвиговым искажениям, то коэффициенты γ_n приобретают новые значения:

$$\Psi_n = \int_0^1 h_n(x)\gamma(x + n\varepsilon)dx,$$

где ε — сдвиг изображения при его смещении на одну строку. Тогда вместо $\gamma(x)$ после декодирования появляется искаженный сигнал

$$\Psi(x) = \sum_n \Psi_n h_n(x).$$

Естественно предположить, что величина сдвиговой деструкции как отличие $\Psi(x)$ от $\gamma(x)$ будет зависеть в первую очередь от размерности преобразования N и от некоторых специфических свойств сигнала $\gamma(x)$. Будем связывать эти свойства с понятием "гладкости" сигнала, т.е. ограничим его вторую производную:

$$|\gamma''(x)| \leqslant M. \tag{1}$$

Тогда, если S_N — оператор, вычисляющий N-ю частичную сумму ряда Уолша–Фурье,

$$S_N\gamma = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(x)\gamma_j, \qquad S_N\Psi = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(x)\Psi_j,$$

то искаженный сигнал $\Psi(x)$ допускает разложение

$$S_N\Psi = S_N\gamma + \varepsilon(S_N g)(x) + \theta\varepsilon^2, \tag{2}$$

где $|\theta(x)| \leqslant C$; C — положительная постоянная, зависящая только от M и N, а g — функция, зависящая от γ.

Соотношение $\gamma \Rightarrow g$ задает линейный оператор V на пространстве гладких функций.* Этот оператор отвечает (в первом приближении) за сдвиговую деструкцию исходного изображения. Характер этого линейного оператора виден из разложения подверженного сдвигу сигнала по Тейлору:

$$\gamma(x + n\varepsilon) = \gamma(x) + \varepsilon n\gamma'(x) + \theta_1(x, n, \varepsilon)n^2\varepsilon^2/2\,, \tag{3}$$

где $|\theta_1(x, n, \varepsilon)| \leqslant M$. При этом восстановленный сигнал имеет вид

$$\Psi_n = \int_0^1 \gamma(x + n\varepsilon)h_n(x)dx =$$

$$= \int_0^1 \gamma(x)h_n(x)dx + n\varepsilon \int_0^1 \gamma'(x)n_n h_n(x)dx + n^2\varepsilon^2\theta_2/2,$$

где $|\theta_2| = |\theta_2(n, \varepsilon)| \leqslant M$.

Следовательно,

$$S_N\Psi(x) = S_N\gamma(x) + \varepsilon S_N(n\gamma')(x) + R_N, \tag{4}$$

---

* Можно показать, что оператор V представим в виде $V = DD_1$, где D — оператор дифференцирования, а D_1 — сходный оператор, действующий по правилу $\{b_n\} \Rightarrow \{nb_n\}$ при том, что b_n — коэффициенты разложения Уолша.

где

$$|R_N| = |R_N(x)| \leqslant M(\varepsilon^2/2) \sum_{n=0}^{N-1} n^2 =$$

$$= M\varepsilon^2(N-1)N(2N-1)/12 \leqslant \varepsilon^2 M N^3/6. \qquad (5)$$

Для получения количественных оценок влияния сдвига на деструкцию выходного сигнала были проведены расчеты погрешности для δ-образного сигнала. В качестве исходного сигнала была выбрана функция

$$f(x) = 4d^2 / \left((2x-1)^2 + 4d^2\right), \qquad 0 \leqslant x < 1 \qquad (6)$$

и вычислены значения ступенчатой функции $G = S_N \Psi$ на каждом промежутке, где G постоянна. В результате сравнения сигналов f, G определяются абсолютная и относительная погрешности:

$$\sigma(x) = |f(x) - G(x)|, \quad \sigma_{\text{отн}}(x) = |f(x) - G(x)|/f(x);$$
$$\sigma = \sup_x \sigma(x), \qquad \sigma_{\text{отн}} = \sup_x \sigma_{\text{отн}}(x).$$

Вообще говоря, величина $\sigma_{\text{отн}}$ уменьшается с уменьшением ε. С другой стороны, чем больше d, тем более гладким является сигнал f. Малые значения d отвечают δ-образному сигналу ("импульс"). Качество приближения $G \approx f$ оценивается граничными значениями $\sigma_{\text{отн}} \approx 0.1$ и $\sigma_{\text{отн}} \approx 0.3$.

Результаты приведенных вычислений в сжатом виде отображаются в таблице.

В верхней части каждой графы указано значение ε, отвечающее условию $\sigma_{\text{отн}} \approx 0.1$, в нижней части — условию $\sigma_{\text{отн}} \approx 0.3$. Прочерк означает, что данное значение $\sigma_{\text{отн}}$ недостижимо ни при каком значении параметра ε. В каждой

Значения параметра сдвига ε, отвечающие заданным значениям $\sigma_{\text{отн}}$

d / N	1	1/4	1/20	1/100
8	0.05	0.03	–	–
	0.5	0.01	0.006	–
16	0.04	0.008	0.0001	–
	0.2	0.02	0.0004	–
32	0.03	0.005	0.00001	–
	0.2	0.01	0.0004	0.000001

строке таблицы можно видеть, что преобразование $f \Rightarrow G$ выдерживает тем большие сдвиговые искажения исходного сигнала f, чем более гладким является этот сигнал (т.е. чем больше d).

Выводы

1. Таким образом, в результате проведенного анализа найдена главная (линейная) часть сдвиговой деструкции гладкого сигнала. Предложено описание линейного оператора, отвечающего за эту часть деструкции.

2. Установлено, что реконструкция изображения выдерживает тем большие сдвиговые искажения, чем более гладким является исходный сигнал.

3. Расчетным образом подтверждено, что относительная погрешность восстановленного гладкого сигнала, подвергнутого сдвиговым искажениям, уменьшается вместе с величиной сдвига.

4. Представляет интерес изучение порогового значения параметра сдвига $\varepsilon(N, d)$ при увеличении разрядности N преобразования Уолша–Адамара.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код 93-02-14865.

Список литературы

[1] *Хармут Х.Ф.* Передача информации ортогональными функциями. М.: Связь, 1975. 272 с.
[2] *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. 790 с.
[3] *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Советское радио, 1972. 352 с.
[4] *Sloane N.J.A., Fine T., Phillips P.G., Harwit M.* // Appl. Opt. 1969. V. 8. N 10. P. 2103–2106.
[5] *Берковская К.Ф., Григорьев Г.К., Гуревич С.Б., Подласкин Б.Г., Поливко В.П.* Преобразование Адамара как метод разложения сигнала в системах оптической обработки информации. В кн.: Оптическая обработка информации. Л.: Наука, 1978. С. 135–147.
[6] *Каргаев П.П., Фомин С.В.* // Теория вероятности и ее применения. 1990. Т. 35. В. 2. С. 271–281.
[7] *Oliver C.I.* Appl. Opt. 1976. V. 15. N 1. P. 1595–1609.
[8] *Берковская К.Ф., Подласкин Б.Г.* // Микроэлектроника. 1975. Т. 4. В. 2. С. 130–139.

Физико-технический
институт им. А.Ф. Иоффе РАН
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
28 декабря 1994 г.