

ВОССТАНОВЛЕНИЕ АТТРАКТОРОВ ПО НАБОРУ КОРОТКИХ ВРЕМЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ

А.А.Кипчатов, Л.В.Красичков

При экспериментальном и численном исследовании динамических систем различной природы существуют ситуации, когда доступна лишь одна переменная, описывающая состояние системы [1]. Исследование сложных и хаотических колебательных режимов таких систем на основе расчета количественных и качественных характеристик требует представления их поведения в фазовом пространстве. Наиболее широко с этой целью в настоящее время используется метод восстановления поведения динамической системы в фазовом пространстве по измерениям одной переменной состояния, предложенный Паккардом и др. [2] и Такенсом [3]. Оценка количественных характеристик (например, размерности [4]) сложных колебаний требует, как правило, большого количества точек при представлении поведения системы в фазовом пространстве [5-7], и как следствие — реализаций большой длины. Однако в некоторых экспериментах затруднительно получить непрерывную временную реализацию достаточной длины, поэтому развиваются методы оценки характеристик сложных колебаний по коротким временным последовательностям (см., например, [8]). В данной работе предлагается метод восстановления аттрактора динамической системы по набору коротких временных реализаций.

Восстановление аттрактора по методу Такенса [3] позволяет реконструировать аттрактор m -мерной гладкой динамической системы по временной реализации $u(t_k)$ ($t_k = kT_s$, $k = 0, 1, \dots, N_d$, T_s — время дискретизации, N_d — длина реализации). В этом случае реконструированный аттрактор в d_E -мерном псевдофазовом пространстве задается набором векторов состояний:

$$\mathbf{v}_n \equiv \mathbf{v}(t_n) = \{u(t_n), u(t_n + \tau), \dots, u(t_n + \tau(d_E - 1))\}, \quad (1)$$

где $n = 1, \dots, Na - l(d_E - 1)$, τ — постоянная временная восстановления ($\tau = lT_s$, $l = 0, 1, \dots$). Необходимо также отметить, что в соответствии с теоремой Такенса восстано-

вленный аттрактор будет топологически эквивалентен исходному, если $d_E \geq 2m + 1$ (часто достаточно выполнения условия $d_E > m$ [9]), и количество векторов бесконечно. Рассмотрение бесконечного числа векторов (1) невыполнимо для реальных экспериментов и приводит к необходимости тщательного выбора τ и d_E (см. [10]). Причем даже в случае “удачного” выбора параметров восстановления для достоверной оценки корреляционной размерности необходимо иметь по крайней мере N_{\min} точек [5-7]. В натурном эксперименте часто невозможно получить непрерывную реализацию длины N_{\min} . Однако если доступно достаточно большое количество коротких временных реализаций одного и того же колебательного процесса, то это позволяет также провести восстановление.

Идея предлагаемой процедуры состоит в накоплении необходимого количества точек аттрактора из набора коротких временных реализаций. Каждая короткая временная реализация должна обеспечивать восстановление по крайней мере одного вектора состояния (1), т. е. длина реализации должна быть не меньше $N_{\text{short}} = l(d_E - 1) + 1$ точек. Если короткие временные реализации принадлежат одному и тому же колебательному процессу и параметры восстановления τ и d_E выбраны такими же, как и в случае длинной реализации, то топологические свойства аттрактора, восстановленного по набору коротких реализаций, и аттрактора, восстановленного из длинной непрерывной реализации, будут одинаковы.

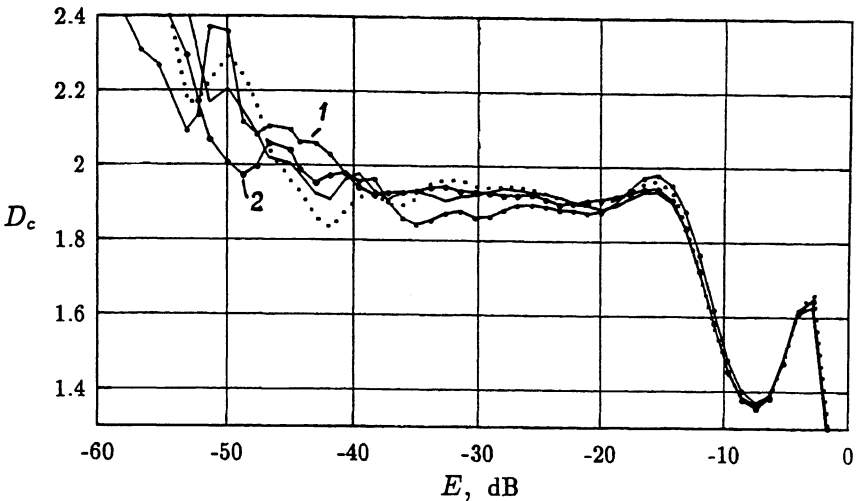
Для проверки предложенной процедуры проводилась оценка корреляционной размерности [4] на основе вычисления корреляционного интеграла [11,13], представленного в виде

$$C(\varepsilon) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^m \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \theta(\varepsilon - \| \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \|), \quad (2)$$

где M — число опорных точек, N — число рассматриваемых точек, θ — функция Хевисайда и $\| \cdot \|$ — норма. Результаты оценки размерности представлены в виде зависимости размерности D_C от масштаба наблюдения ε , выраженного в децибелах ($E = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)$, где ε_0 — размер аттрактора).

В качестве тестовой реализации использовалась последовательность значений переменной x уравнений Ресслера [14] в режиме хаотических колебаний, когда реализуется ленточный аттрактор:

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + 0.2y, \quad \dot{z} = 0.2 - 4.6z + xz. \quad (3)$$



Корреляционная размерность $D_c(E)$, рассчитанная по длинной непрерывной реализации (кривая, изображенная точками) и по набору коротких реализаций (см. пояснения в тексте). Все расчеты производились для следующих значений параметров: $\tau = 5T_s = 1.0$, $d_E = 7$, $N = 2 \cdot 10^4$, $M = 10^3$.

Рассмотрим три примера восстановления аттрактора по коротким временным реализациям и проведем сравнение результатов оценки корреляционной размерности для этих примеров и для длинной непрерывной реализации, позволяющей восстановить $2 \cdot 10^4$ точек (векторов состояния).

В первом примере восстановление аттрактора производится по реализациям, каждая из которых позволяет получить только один вектор состояния, а интервал между реализациями ($N_{ts} \in [1.512]$) точек выбирался случайным образом. Результаты оценок размерности приведены на рисунке, линия 1.

Во втором примере число векторов состояний, восстановленных по коротким реализациям, выбирается случайно, в диапазоне от 1 до 65, а интервал между реализациями — как и в предыдущем примере. Оценка размерности приводится на рисунке, линия 2.

В третьем примере моделируется система, которая генерирует реализацию в течение короткого интервала времени. Причем такая система может генерировать короткие реализации многократно, но каждый раз генерация начинается с разных начальных условий. Моделирование такой ситуации производилось путем многократного интегрирования уравнений (3) с различными начальными условиями (x_0, y_0, z_0 выбирались случайно на интервале $[-10, 10]$ с ша-

гом 0.005), переходный процесс $2 \cdot 10^4$ точек исключался из рассмотрения, а затем необходимое количество точек накапливалось из набора реализаций, позволяющих восстановить 24 вектора состояний. Результаты оценки размерности для этого примера приведены на рисунке (линия с точками).

Сравнение результатов расчета размерности для трех вышеприведенных примеров с результатами, полученными по длинной реализации, позволяют сделать вывод о приемлемости данной процедуры.

В заключение хочется отметить, что предложенная методика может быть эффективно использована для оценки характеристик по фрагментированным (прерывистым) данным (например, медико-биологические, экономические, климатические и др. данные), а также для сверхвысокочастотных и импульсных динамических процессов. Восстановление, рассмотренное в третьем примере, будет полезно при исследовании сверхвысокочастотных и импульсных динамических процессов (система находится в колебательном режиме в течение короткого интервала времени, например, при исследовании динамических процессов в ТОКАМАКе [15]), когда короткие временные реализации могут быть получены с помощью высокоскоростного запоминающего осциллографа. Кроме того, разрывы во временной реализации получаются при оцифровке экспериментальных данных при помощи компьютера за счет использования DMA (прямого доступа к памяти), и являются следствием страничной организации памяти.

Авторы выражают благодарность С.А. Левчуку за инициирование настоящей работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-02-16171).

Список литературы

- [1] *Interpretation of Time Series from Nonlinear Systems* / Ed. by P.G. Drazin, G.P. King // *Physica D*. 1992. V. 58.
- [2] *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. N 9. P. 712-716.
- [3] *Takens F.* In: *Dynamical Systems and Turbulence* / Ed. by D. Rand, L.-S. Young, Springer, Berlin, 1981. P. 366-381.
- [4] *Grassberger P., Procaccia I.* // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 50. N 5. P. 346-349.
- [5] *Smith L.A.* *Phys. Lett. A*. 1988. V. 133. N 6. P. 283-288.
- [6] *Nerenberg M.A.H., Essex C.* // *Phys. Rev. A*. 1990. V. 42. N 12. P. 7065-7074.
- [7] *Eckmann J.-P., Ruelle D.* // *Physica D*. 1992. V. 56. P. 185-187.
- [8] *Havstad J.W., Ehlers C.L.* // *Phys. Rev. A*. 1989. V. 39. N 2. P. 845-853.
- [9] *Ding M., Grebogi C., Ott E., Sauer T., Yorke J.* // *Physica D*. 1993. V. 69. P. 404-424.

- [10] *Buzug Th., Reimes T., Pfister G.* // *Europhys. Lett.* 1990. V. 13. N 7. P. 605–610.
- [11] *Broggi G.* // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1988. V. 5. N 5. P. 1024–1028.
- [12] *Theiler J.* // *Phys. Rev. A.* 1990. V. 41. N 6. P. 3038–3051.
- [13] *Купчатов А.А., Красичков Л.В., Андрушкевич А.В.* // Докл. междунар. сем. по нелинейным цепям и системам. Москва, 1992. Т. 2. С. 308–317.
- [14] *Rössler O.E.* // *Phys. Lett. A.* 1976. V. 57. N 5. P. 397–398.
- [15] *Simm C.W., Sawley M.L., Skiff F., Pochelon A.* // *Helv. Phys. Acta.* 1987. V. 60. P. 510–551.

Поступило в Редакцию
17 ноября 1995 г.
