

01;05.4;12

©1994

## МОДУЛЯЦИОННАЯ МЕТОДИКА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИСХОДНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ АМПЛИТУД МОДУЛЯЦИИ

*Н. Д. Кузьмичев*

Во многих задачах экспериментальной физики исследование нелинейности физических параметров представляет основной интерес. Эта задача может быть трудноразрешимой, если нелинейная часть исследуемой зависимости проявляется на фоне значительной линейной части. Дополнительная трудность возникает из-за гистерезиса и сильной нелинейности.

Вышеприведенные трудности возникают, например, при исследовании намагниченности,  $I$ - $V$  и других характеристик высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), а также при исследовании аналогичных зависимостей других материалов.

Широко известная в литературе модуляционная методика во многих случаях позволяет обойти выше сформулированную проблему, но она разработана на случай малых амплитуд модуляции в отсутствие гистерезиса в исследуемой величине. В работе [1] сделана попытка обобщить указанную методику на случай произвольных амплитуд модуляции с помощью рядов Тейлора и Фурье без учета гистерезиса.

В настоящей работе разработана модуляционная методика восстановления гистерезисных магнитных,  $I$ - $V$  характеристик и их производных для любых амплитуд модуляции.

Хорошо известно, что намагниченность ВТСП, даже в очень слабых магнитных полях  $H \sim 0.1 - 10$  Э, обладает сильной нелинейностью и обнаруживает гистерезис. Поэтому традиционная модуляционная методика исследования магнитной восприимчивости не годится на этот случай. При помещении образца ВТСП в модулированное внешнее магнитное поле напряженностью  $H = H_- + H_\sim \cos(\omega t)$ , намагниченность  $M$  образца становится периодической функцией времени  $t$ . Здесь  $H_-$  — напряженность постоянного магнитного поля,  $H_\sim \cos(\omega t)$  — напряженность переменного поля амплитудой  $H_\sim$  и циклической частотой  $\omega$ .

Ряд Фурье для  $M$  обладает медленной сходимостью и будет иметь вид

$$M(H_- + H_\sim \cos \omega t) = \frac{M'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ M'_n \cos(n\omega t) + M''_n \sin(n\omega t) \right]. \quad (1)$$

Коэффициенты Фурье  $M'_n(H_-, H_\sim)$  и  $M''_n(H_-, H_\sim)$  (амплитуды действительных и мнимых частей гармоник намагниченности соответственно) определяются выражениями [2]:

$$M'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \times \frac{M_-(H_- + H_\sim \cos \omega t) + M_+(H_- + H_\sim \cos \omega t)}{2} \times \cos(n\omega t) d(\omega t). \quad (2)$$

$$M''_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [M_-(H_- + H_\sim \cos \omega t) - M_+(H_- + H_\sim \cos \omega t)] \times \sin(n\omega t) d(\omega t). \quad (3)$$

Здесь  $M_+$  — ветвь намагниченности в возрастающем магнитном поле,  $M_-$  — в убывающем поле (рис. 1).

Полагая в (1)  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3}{2}\pi$ , получим

$$\overline{M(H_-)} = \frac{M_-(H_-) + M_+(H_-)}{2} = \frac{M'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M'_{2n}(H_-, H_\sim). \quad (4)$$

$$\Delta M(H_-) = M_-(H_-) - M_+(H_-) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M''_{2n+1}(H_-, H_\sim). \quad (5)$$

Таким образом, зная зависимости  $M'_{2n}$  и  $M''_{2n+1}$  от  $H_-$  для любых  $H_\sim$ , можно восстановить  $\overline{M(H)}$  и  $\Delta M(H)$  и соответственно  $M_+(H)$  и  $M_-(H)$  по формулам (4) и (5). Возьмем производную по времени от левой и правой частей выражения (1) и полагая  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3}{2}\pi$ , получим

$$\frac{d}{dH} \overline{M(H_-)} = \frac{1}{H_\sim} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) M'_{2n-1}(H_-, H_\sim). \quad (6)$$

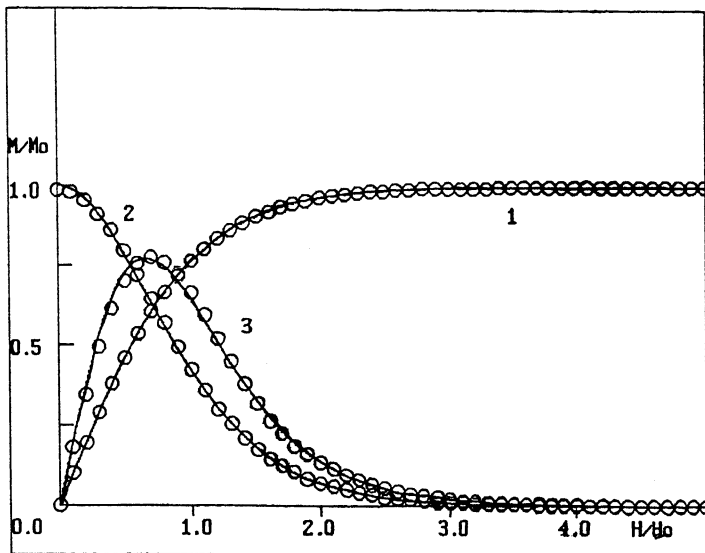


Рис. 1. Пример петли гистерезиса намагниченности для сверхпроводника и ее ветви:  $M_H$  — начальная кривая намагниченности,  $M_+$  — ветвь в возрастающем поле,  $M_-$  — ветвь в убывающем поле,  $H$  — напряженность постоянного магнитного поля,  $H_{\sim}$  — амплитуда переменного поля,  $\bar{M}$  — средняя намагниченность при  $H_-$ ,  $\Delta M$  — разность. На петле указаны значения фазы модуляции в точках перехода с ветви  $M_-$  на  $M_+$  и наоборот.

$$\frac{d}{dH} \Delta M(H_-) = \frac{2}{H_{\sim}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n) M''_{2n}(H_-, H_{\sim}). \quad (7)$$

Для второй производной от  $M$ , следуя алгоритму получения первой производной, получим

$$\frac{d^2}{dH^2} \overline{M}(H_-) = \frac{1}{H_{\sim}^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n)^2 M'_{2n}(H_-, H_{\sim}). \quad (8)$$

$$\frac{d^2}{dH^2} \Delta M(M_-) = \frac{2}{H_{\sim}^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1)^2 M''_{2n-1}(H_-, H_{\sim}). \quad (9)$$

Применяя вышеприведенный алгоритм, можно получить выражения для производных любого порядка.

Таким образом, используя конечное число экспериментально определенных зависимостей  $M_n(H_-, H_{\sim})$ , можно восстановить  $M$ ,  $\frac{dM}{dH}$ ,  $\frac{d^2M}{dH^2}$ , и т. д.

В отсутствие гистерезиса справедливы формулы (4), (6) и (8), так как в этом случае  $M = \bar{M}$  и  $\Delta M = 0$ .

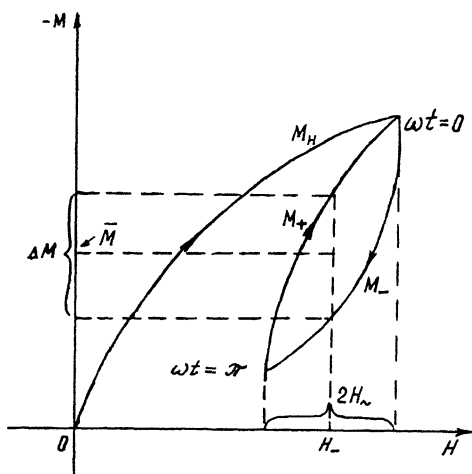


Рис. 2. Результаты восстановления намагниченности  $M(H) = -M_0 \text{th} \left( \frac{H}{H_0} \right)$  и ее 1-й и 2-й производных по 12 гармоникам. 1 — исходная зависимость  $M(H)$ , 2 —  $\frac{dM}{dH}$ , 3 —  $\frac{d^2M}{dH^2}$ , о — восстановленные кривые, кривые — аналитические зависимости (выражение (14) и его 1-я и 2-я производные).

Продемонстрируем развитую методику на теоретической безгистерезисной зависимости  $M(H)$  для  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ , использованную в работе [3]:

$$M(H) = -M_0 \text{th}(H/H_0). \quad (10)$$

В работе [4] начальная кривая намагниченности близка к зависимости (10). Результаты расчета на ЭВМ по формулам (2), (4), (6), (8) и (10) с использованием 12-и ( $H \sim /H_0 = 3$ ) гармоник  $M_n$  приведены на рис. 2 и показывают согласие расчетных и аналитических кривых.

На практике при экспериментальном исследовании высших гармоник необходимо учитывать измерительные шумы, определяемые соотношением "сигнал/шум". В этом случае для оценки точности восстановления исходной зависимости необходимо воспользоваться критерием сходимости ряда, в частности ряда Фурье (1), и часто большое число членов ряда нет необходимости учитывать (сильная сходимость). Учтем, что напряжение  $U_n$  гармоник сигнала отклика прямо пропорционально  $M_n$  [1]. Запишем этот критерий для

ряда (6):

$$\left| H \sim \frac{dU}{dH} - \sum_{n=1}^N (-1)^n (2n-1) U_{2n-1} \right| < \delta U. \quad (11)$$

Здесь напряжение  $U = AM$ ,  $A$  — аппаратная константа (для  $I - V$  характеристик  $A = 1$ ),  $M$  — истинная намагниченность,  $N$  — число нечетных  $U_n$ , определяемых малым напряжением  $\delta U$ . Для приближенной оценки возьмем  $\delta U = U_{\text{ш}}$  (среднее квадратичное напряжение шумов). При всех  $n \leq N$ ,  $U_n > U_{\text{ш}}$ . Второй член в левой части неравенства (11) есть  $AH \sim \frac{dM_*}{dH}$ . Окончательную оценку точности восстановления имеем

$$\left| \frac{dM}{dH} - \frac{dM_*}{dH} \right| \lesssim \frac{\bar{U}_{\text{ш}}}{|A|H} \quad (12)$$

Здесь  $\frac{dM_*}{dH}$  есть приближенно восстановленная производная. Аналогичные оценки можно получить для (4), (5), (7)–(9). Заметим, что при заданном  $\bar{U}_{\text{ш}}$  число  $N$  наблюдаемых гармоник пропорционально амплитуде модуляции и степени нелинейности исходной зависимости. Степень нелинейности определяется числом доминирующих членов ряда Тейлора для  $M$ . Высокая степень нелинейности обуславливает медленную сходимость ряда (1).

Развитую методику можно применять не только при исследовании намагниченности и ВАХ [5], но и иных характеристик материалов.

### Список литературы

- [1] Кузьмичев Н.Д. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 7. С. 56–60.
- [2] Кузьмичев Н.Д. // Деп. ВИНТИ. 1994. № 391–В94. 16 с.
- [3] Jeffries C., Lam O., Kim Y. et al. // Phys. Rev. B. 1989. V. 39. N 16. P. 11526–11537.
- [4] Sun J., Scharen M., Bourne L. et al. // Phys. Rev. B. 1991. V. 44. N 10. P. 5275–5279.
- [5] Васютин М.А., Кузьмичев Н.Д. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. В. 23. С. 5–9.

Мордовский государственный  
университет им. Н.П. Огарева  
Саранск

Поступило в Редакцию  
28 апреля 1994 г.  
В окончательной редакции  
14 октября 1994 г.