03

ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОДОГРЕВЕ СБОКУ В КОНДЕНСАТОРЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ЖИДКИМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Е.Д.Эйдельман

Введение

В экспериментальных условиях при получении пленок жидкого диэлектрика [1] используется градиент температуры („нагрев"), имеющий компоненту также и вдоль слоя. В этой работе будет рассмотрена задача, когда нагрев $|\nabla T_0| = A_x = A$ имеет только такую составляющую (ось x — вдоль, а z — поперек слоя). При отсутствии внешнего электрического поля в конденсаторе E задача, в которой градиент температуры создается нагреванием слоя сбоку решалась в [2–4]. Для жидких полупроводников — сред, в которых важен учет термоэлектрического эффекта, — физика явлений, подобных рассмотренным ниже, обсуждается в [5].

Переходя к изучению взаимодействия гидродинамических и электрических явлений при возбуждении неустойчивости в жидких диэлектрических материалах, отметим, что в таких средах взаимодействие реализуется через зависимость диэлектрической проницаемости ε от координат. Это может быть вызвано структурообразующим действием потоков как тепла (эффект подобен [5] термоэлектрическому эффекту), так и вещества [6].

Принятое здесь рассмотрение близко к развитому в [2], результаты же подобны полученным в [5]. Оказывается, что при некотором значении I_* безразмерного параметра

$$\mathcal{E} = 4I^4 = \frac{\gamma^2 A^2 E_c^2 h^4}{\rho \nu \varkappa \varepsilon}, \tag{1}$$

зависящего как от характеристик среды (ρ — плотность жидкости, ν, $\varkappa$ — диссипативные коэффициенты соответственно кинематической вязкости и температуропроводности, а $\gamma = \partial\varepsilon/\partial T$ — коэффициент, характеризующий температурную зависимость диэлектрической проницаемости („термоэлектрический" коэффициент), так и от геометрии задачи (h — толщина слоя жидкости, характерный размер) во внешнем поле E_0 возникает неустойчивость. А именно, одномерное движение вдоль слоя резко нарастает. Это показывает, что одномерное движение превращается в ячеистое и в жидком диэлектрике возникает ячеистое движение. Такая неустойчивость есть проявление электроконвекции, так как при отсутствии поля неустойчивость не возникает.

Постановка задачи

Когда слой подогревается сбоку, не существует стационарного состояния и порога возбуждения. Движение вдоль слоя возникает при сколь угодно малом нагреве A. Будет рассматриваться средняя часть пленки, т.е. часть, не находящаяся вблизи боков кюветы. Для этой части жидкости можно записать

$$T = Ax \tag{2}$$

на граничных поверхностях $z = h$ и $z = 0$. На "холодной" стороне температура $T = T_0 = T_c = 0$ при $x = 0$. В средней части пленки движение имеет одно направление по оси x и скорость имеет одну компоненту $v = v_x \gg v_z$. Скорость зависит только от координаты z.

Так как нет стационарного состояния, то не работает теория возмущения, а уравнения становятся нелинейными. Для таких пленок, у которых размеры вдоль слоя $\lambda \gg h$ гораздо больше, чем поперечные размеры h, можно записать эти уравнения. Так, x и z компоненты уравнения Навье–Стокса станут

$$\nu \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\rho}\gamma\frac{\partial T}{\partial x}; \tag{3}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \beta g T = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\rho}\gamma\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{4}$$

где справа записана электрострикционная сила [7].

Кроме уже разъясненных выше применяются обычные обозначения p — давление в жидкости. В давление включены и градиентные (потенциальные) слагаемые электрострикционной силы. Учитывается подъемная сила, β — коэффициент объемного расширения. Удобно считать, что поле E (внешнее поле E_0) перпендикулярно слою и направлено по оси z, противоположно ускорению силы тяжести g. Жидкость считается несжимаемой.

Дифференцируя (3) по z, а (4) по x, легко исключить из уравнений движения давление. Конечно, при этом используются оправданные видом окончательного решения и обычно принимаемые (см. [2] и [5]) соотношения. Во-первых, считается, что $\partial T/\partial x = A$ — величина, постоянная не только на граничных поверхностях (см. (2)), но и по всей толщине жидкости. Во-вторых, что $\partial T/\partial x$ и E от x не зависят. Эти условия вполне соответствуют модели "средней части тонкого слоя", которая принимается в этой работе.

Если использовать еще и уравнение Пуассона

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{\gamma E}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{5}$$

то легко получить, что

$$\frac{d^3 v}{dz^3} = \left(\frac{\beta g}{\nu} - \frac{\gamma^2 E}{\rho\nu\varkappa}\frac{\partial T}{\partial z}\right) A. \tag{6}$$

Наиболее грубое приближение, используемое далее, заключается в том, что электрическое поле считается постоянным по всей толщине жидкости: $E = E_0$, т.е. поле по всему слою принимается равным значению напряженности внешнего поля на границе слоя. Из-за этого приближения дальнейшие расчеты нельзя считать точными в том же смысле, что и решения в [2] и [5]. Однако очевидно (и это подтверждается численными решениями), что качественно характер приведенных ниже результатов от такого приближения не меняется. С другой стороны, именно это приближение позволяет игнорировать джоулево тепло в уравнении передачи тепла

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{A}{\varkappa} v, \tag{7}$$

и с его помощью исключить температуру из уравнения (6). В результате получается обыкновенное, линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 v}{d\xi^4} + 4I^4 v = 0, \tag{8}$$

где введена безразмерная переменная $\xi = z/h$, а новое безразмерное число I определено соотношением (1). Теперь ясно, что это число показывает, во сколько раз новая сила, обусловленная температурной зависимостью диэлектрической проницаемости, а также совместным действием нагрева и внешнего поля, превосходит силу диссипации $\rho\nu\varkappa$.

Перейдем к постановке граничных условий. В экспериментальных условиях жидкий диэлектрик во внешнем электрическом поле удобно исследовать, помещая его между обкладками конденсатора. Эти обкладки — твердые металлические поверхности, т. е. при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ выполняются условия $v = 0$. В случае наличия свободной границы (например, с воздухом) на ней следовало бы учитывать действие сил поверхностного натяжения ("термокапиллярности", см. [2] и [3]).

Как всегда [2], должно быть выполнено и условие замкнутости течения, т.е. через поперечное сечение слоя в направлениях по оси x и в противоположном направлении должно протекать равное количество жидкости. Имеем

$$\int_0^1 v d\xi = 0. \tag{9}$$

Точные решения

Решая поставленную задачу, найдем, что в случае двух твердых границ скорость движения вдоль слоя запишется как

$$v = \frac{\varkappa}{h} \frac{\mathrm{R}}{8I^2} \frac{f_r(I;\xi)}{\Delta_r}, \tag{10}$$

а температура как

$$T = Ah \left[\frac{x}{h} + \frac{\mathrm{R}}{16I^4} \frac{F_r(I;\xi)}{\Delta_r} \right]. \tag{11}$$

Здесь R — число Рэлея, показывающее действие сил плавучести по отношению к силам диссипации, f_r и F_r — сложные безразмерные функции от координаты ξ (т.е. z) и безразмерного числа I (см. (1)). Важно, что в знаменателе стоит число

$$\Delta_r = \operatorname{ch}(I)\Big[\operatorname{sh}(I) - \sin(I)\Big] + \frac{1}{2}\cos(I)\Big[\sin(I)\exp(-I) - \operatorname{ch}^2(I)\operatorname{sh}(I)\Big]. \tag{12}$$

Формулы решения при свободной (верхней) границе имеют ту же структуру, но число R заменяется числом Марангони M — показывающим действие сил поверхностного натяжения (термокапиллярного эффекта) по отношению к силам диссипации и, конечно, в такое решение войдут другие безразмерные функции, которые, впрочем, также весьма громоздки.

Анализ решения

Переходя к анализу полученных решений, отметим, что коне́чно в отсутствие внешнего поля или в отсутствие зависимости диэлектрической проницаемости от температуры формулы (10) и (11) переходят в решения, найденные в

[2]. Остальные результаты подобны полученным в [5]. Под действием только электрической силы, движение в горизонтальном направлении при малых нагревах не возникает. Равновесие при сколь угодно малом нагреве нарушается из-за действия силы плавучести или силы поверхностного натяжения (или обеих сил совместно). Действие же электрической силы приводит к "резонансному" нарастанию решений (как для скорости, так и для температуры) при $\Delta_r = 0$, т. е. при $I \lesssim I_* \simeq 1.34$. Итак, само движение вдоль слоя возникает даже лишь при наличии одного нагрева из-за действия сил плавучести или термокапиллярности. При $\mathrm{R} = 0$ ($\mathrm{M} = 0$) движение исчезает. Однако в отсутствие электрического поля или при не зависящей от температуры диэлектрической проницаемости потери устойчивости ни при каком нагреве не происходят. При наличии же и нагрева вдоль слоя и поля поперек него в диэлектрической жидкости с проницаемостью, зависящей от температуры при приближении значения I к I_* (например, при усилении нагрева или при увеличении напряженности поля) движение превращается из чисто продольного в ячеистое, что имеет существенное значения для теплопереноса в такой среде. Конечно, учет переменности и электрического поля внутри жидкости несколько усложнил бы решение, но не изменил бы главного — потери устойчивости чисто продольного движения при $I \simeq I_*$.

Подставляя значение I_* в (1) и считая при оценках, что $Ah \simeq T$ — внешней температуре на нагретой боковой поверхности — найдем, что потеря устойчивости происходит при напряженностях поля не меньших чем

$$hE \gtrsim \left(I_*^4 \, \frac{4\varepsilon\rho\nu\varkappa}{\gamma^2 T^2} \right)^{1/2}. \tag{13}$$

Используя для жидких диэлектриков значения (см. [1]) $\nu \simeq \varkappa \simeq 10^{-5}$–$10^{-6}$ м^2/с; $\rho \simeq 2 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\varepsilon \simeq 10^{-9}$–$10^{-10}$ Ф/м и считая, что $\partial \ln \varepsilon / \partial \ln T \simeq 1$, найдем, что потенциал, который должен быть приложен к конденсатору, чтобы возникло ячеистое движение, не так уж и велик и равен примерно 10^4 В.

С другой стороны, при заданном внешнем поле (например, $Eh \simeq 1000$ В) можно оценить необходимый для возбуждения неустойчивости продольного движения нагрев:

$$\frac{Ah}{T} \simeq I_*^4 \, \frac{\rho\nu\varkappa}{(Eh)^2 \gamma T}. \tag{14}$$

Такой нагрев довольно велик.

Таким образом, в данном случае возможна комбинация внутренних параметров диэлектрика (трансформаторного масла) и внешних воздействий, которая может существенно менять теплотехнические свойства конструкции.

Список литературы

[1] *Стишков Ю.К., Остапенко А.А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Л., 1989.
[2] *Бирих Р.В.* // ПМТФ, 1966. В. 3. С. 69.
[3] *Levich V.G., Krylov V.S.* // Ann. Rev. Fluid Mech., 1969. V. 1. P. 302.
[4] *Саночкин Ю.В.* // ПМТФ, 1983. В. 6. С. 134.
[5] *Эйдельман Е.Д.* // ЖЭТФ. 1993. В. 104. С. 3058.
[6] *Гуревич Л.Э., Иоффе И.В.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 1133.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Электродинамика сплошных сред. М., 1982.

Санкт-Петербургский
химико-формацевтический
институт

Поступило в Редакцию
29 апреля 1994 г.