Письма в ЖТФ, том 20, вып. 20 26 октября 1994 г.

0.1;04;10

УСТОЙЧИВОСТЬ СИЛЬНОТОЧНЫХ ПУЧКОВ ЭЛЕКТРОНОВ В СТЕЛЛАТРОНАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗБУЖДЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В.В.Долгополов, Ю.В.Кириченко, С.С.Романов, Ю.В.Ткач

Исследование поперечных колебаний электронных пучков в стеллатронах представляет интерес в связи с возможностью параметрической раскачки стеллараторными магнитными полями этих колебаний. В работах [1,2] рассматривались неустойчивости, возникающие при взаимодействии колебаний электронных пучков с собственными колебаниями волновода, образованного металлическим кожухом, и стеллараторными мегнитными полями. Нас будет интересовать возможность возникновения неустойчивости при взаимодействии поперечных колебаний узких электронных пучков только со стеллараторными полями, т.е. неоднородностями магнитного поля.

Движение электронов пучка будем описывать дрейфовыми уравнениями [3,4]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v\frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{c}{B^2}[\mathbf{E},\mathbf{B}] - \frac{m_e c v^2}{e B^3}[\mathbf{B},\nabla B], \tag{3}$$

где $B = |\mathbf{B}|$, $\mathbf{B}$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра ларморовской орбиты электрона (ведущего центра), $-e$ и m_e — заряд и релятивистская масса электрона, c — скорость света, v — проекция скорости электрона на направление магнитного поля. В правой части уравнения (1) опущены слагаемые, пропорциональные квадрату перпендикулярной магнитному полю составляющей скорости электронов, поскольку она мала по сравнению с v.

Как и в работе [5], воспользуемся системой координат x, y, θ, связанной с псевдотороидальной системой r, ϑ, θ соотношениями

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta, \qquad R = R_0 - x, \tag{2}$$

где r и R — малый и большой радиусы соответственно, R_0 — радиус магнитной оси стеллараторного поля, ϑ и θ — малый и большой азимуты соответственно.

В этой системе координат магнитное поле двухзаходного стеллатрона приближенно может быть представлено в виде [5]:

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_\theta \frac{B_0}{1 - \frac{x}{R_0}} + \mathbf{e}_x B_0 s k_m \Big(x \sin m\theta + y \cos m\theta\Big) +$$

$$+ \mathbf{e}_y B_0 \Big\{\beta + s k_m (x \cos m\theta - y \sin m\theta)\Big\}, \tag{3}$$

где

$$k_m = \frac{m}{R_0}, \qquad |s| < \frac{1}{2}, \qquad |\beta| \ll 1,$$

$$|k_m r| \ll 1, \qquad B_0 > 0, \qquad R_0 > 0, \tag{4}$$

m — целое число, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\theta$ — единичные векторы вдоль соответствующих направлений, B_0, s и β — постоянные величины.

В условиях, когда радиус пучка мал по сравнению с периодом стеллараторного магнитного поля $2\pi/k_m$, длиной волны и радиусом камеры, целесообразно ввести в рассмотрение следующие переменные:

N — число электронов, приходящееся на единицу длины пучка;

E — создаваемое пучком электрическое поле, усредненное по его поперечному сечению;

H — создаваемое пучком магнитное поле, усредненное по его поперечному сечению.

Можно показать, что в узком пучке эти величины связаны соотношениями

$$E_\parallel \approx a\epsilon \frac{\partial N}{\partial l}, \qquad \mathbf{E}_\perp \approx \frac{a}{2} \epsilon N \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial l}, \qquad \mathbf{H} \approx \frac{v}{c} \Big[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}_\perp\Big], \tag{5}$$

где $E_\parallel$ и $\mathbf{E}_\perp$ — параллельная и перпендикулярная по отношению к пучку составляющие электрического поля $\mathbf{E}$, l — расстояние, отсчитываемое вдоль пучка, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, направленный вдоль пучка, α — некоторый параметр, который, например в случае круглого пучка, определяется соотношениями

$$\alpha = \frac{2}{\gamma^2} \ln \frac{\gamma\lambda}{\pi \bar{r}_b}, \qquad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad \frac{\gamma\lambda}{\pi \bar{r}_b} \gg 1, \tag{6}$$

где λ — длина волны вдоль пучка, $\bar{r}_b$ — средний радиус пучка.

Принимая во внимание соотношения (3)–(5), уравнение (1) можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = s\omega_m\Big(x\sin m\theta + y\cos m\theta\Big) + \frac{aceNR}{2\gamma^2 B_0 R_0}\left(\frac{\partial\tau}{\partial l}\right)_y, \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = s\omega_m\Big(x\cos m\theta - y\sin m\theta\Big) + v\delta - \frac{aceNR}{2\gamma^2 B_0 R_0}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)_x, \quad (8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}, \quad (9)$$

где $\delta = \beta - \frac{m_e cv}{eB_0 R_0}$, $\omega_m = k_m v$, $x(t,\theta)$, $y(t,\theta)$ — координаты центра пучка в плоскости xy.

В условиях, когда отклонения пучка от магнитной оси стеллараторного поля малы по сравнению с длинами волн вдоль пучка $r \ll \lambda$, справедливы соотношения

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial l}\right)_x \cong \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2}, \qquad \left(\frac{\partial\tau}{\partial l}\right)_y \cong \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2}. \quad (11)$$

Из уравнений (7)–(11) следует

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{v}{R_0}\frac{\partial x}{\partial\theta} - \nu\frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2} = s\omega_m\Big(x\sin m\theta + y\cos m\theta\Big), \quad (12)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{v}{R_0}\frac{\partial y}{\partial\theta} + \nu\frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} = s\omega_m\Big(x\cos m\theta - y\sin m\theta\Big) + \Delta_v, \quad (13)$$

где

$$\nu = \frac{\alpha ceN}{2\gamma^2 B_0 R_0^2}, \qquad \Delta_v = v\delta = \nu R_0. \quad (14)$$

В случае рассматриваемых поперечных колебаний зависимостью величин v, ν, ω_m и Δ_v от t и θ можно пренебречь.

Опуская в уравнениях (12) и (13) производные по времени, мы получим уравнения, определяющие координаты $x(\theta)$ и $y(\theta)$ пучка в условиях равновесия. Очевидно, что при $\Delta_v = 0$ центр пучка совпадает с магнитной осью стеллараторного поля: $x(\theta) = y(\theta) = 0$.

Опуская в системе уравнений (12), (13) слагаемое Δ_v, мы будем иметь уравнения, описывающие поведение во времени отклонений $(x(t,\theta), y(t,\theta))$ от состояний равновесия. Заменой $z_\pm = x \pm iy$ эти уравнения приводятся к одному уравнению для комплексной функции $z_\pm(t,\theta)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{R_0}\frac{\partial}{\partial\theta} \mp i\nu\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) e^{\pm im\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{R_0}\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\nu\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) z_\pm =$$

$$= \left(s\omega_m\right)^2 e^{\pm im\theta} z_{\pm}. \quad (15)$$

Решения уравнения (15) можно представить в виде

$$z_{\pm} = z_{0\pm} e^{i(\mu\theta - \omega t)}. \quad (16)$$

где μ — целое число, $z_{0\pm}$ — произвольная постоянная.

Подставляя выражение (16) в уравнение (15), найдем азвисимость частоты волны ω от волнового числа μ

$$\omega = \left(\mu \pm \frac{m}{2}\right)\left(\frac{v}{R_0} + m\nu\right) \mp$$

$$\mp \sqrt{\left\{\frac{m\nu}{2R_0} + \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\mu \pm \frac{m}{2}\right)^2\right]\nu\right\}^2 - \left(\frac{smv}{R_0}\right)^2}. \quad (17)$$

Колебания, описываемые этим дисперсионным уравнением, будут экспоненциально нарастать или затухать во времени, если подкоренное выражение в соотношении (17) отрицательно. Тогда пучок неустойчив и выбрасывается на стенки камеры. Так как $|s| < 1/2$, это возможно только в том случае, когда $mv < 0$, т.е. $m\beta < 0$. Поскольку реальным пучкам соответствует неравенство $\nu \ll |mv|/R_0$, волновые числа нарастающих во времени колебаний удовлетворяют соотношению

$$|\mu| \approx \sqrt{\frac{-mv}{2R_0\nu}}. \quad (18)$$

Для таких больших волновых чисел условие применимости нашего рассмотрения $\bar{r}_b \ll \lambda$ приобретает вид

$$\frac{|m\beta|\gamma^4\omega_B^2}{\omega_b^2 \ln \frac{\gamma\lambda}{\pi\bar{r}_b}} \ll 2\pi^2, \quad (19)$$

где ω_B и ω_b — циклотронная частота электрона в поле B_0 и средняя плазменная (ленгмюровская) частота пучка соответственно в лабораторной системе координат.

Из неравенства (19) следует, что мы можем говорить о неустойчивости только очень плотных и малоэнергетичных пучков, т.е. неустойчивость имеет место на начальной стадии ускорения плотных пучков.

Если $m\beta > 0$, пучок всегда устойчив по отношению к возбуждению рассматриваемых колебаний.

Список литературы

[1] *Hughes T.P., Goodfrey B.* // Phys. Fluids. 1986. V. 29. N 5. P. 1968–1703.
[2] *Tsang K.T.* // Phys. Fluids. 1990. V. 2. N 11. P. 2779–2786.
[3] *Сивухин Д.В.* В сб.: Вопросы теории плазмы. В. 1. М., 1963. С. 7–97.
[4] *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* В сб.: Вопросы теории плазмы. В. 2. М., 1963. С. 177–261.
[5] *Dolgopolov V.V., Kirichenko Yu.V., Liliko Ya.F.* et al. // Proc. of 8th Int. Conf. on High-Power Part. Beams (BEAMS'90). USSR. World Scientific, 1991. P. 872–877.

Национальный научный центр
Харьковский физико-технический
институт
Украина

Поступило в Редакцию
18 июня 1994 г.