Письма в ЖТФ, том 20, вып. 20 26 октября 1994 г.

01;07;10

ИЗУЧЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СИНХРОТРОННОГО СВЕТА В СИСТЕМЕ FOFDOD

О.Е.Шишанин

Поляризационные и угловые характеристики синхротронного излучения наиболее хорошо изучены в однородных и аксиально-симметричных магнитных полях (см., например, [1,2]), однако эксперименты, использующие это излучение, проводятся на ускорителях или накопительных кольцах, содержащих прямолинейные промежутки. Сильнофокусирующая система FD (фокусировка–дефокусировка) рассматривалась в работах [3,4].

В данном случае пусть электрон движется в магнитной системе из N периодов, где длина одного периода L составляется последовательно как $a + l_1 + a + a + l_2 + a$, где a — длина магнитов, l_1, l_2 — длины прямолинейных промежутков. Такая модель применяется, например, в Ереванском синхротроне.

Величина, азимутального угла φ для одного периода равна $2\pi/N$. Вся длина орбиты $s = 2\pi R + Nl_1 + Nl_2 = 2\pi R_0$, где R_0 — средний радиус. Введем малый параметр $k = l_1 + + l_2)/4a$, который дает отношение длин свободных участков к длине магнитов $(a = \pi R/2N)$; тогда $R_0 = R(I + k)$.

Показатель спадания поля равен n на интервалах по φ $\left(0, \frac{a}{L}, \frac{2\pi}{N}\right)$, $\left(\frac{a+l_1}{L}, \frac{2\pi}{N}, \frac{2a+l_1}{L}, \frac{2\pi}{N}\right)$ и $-n$ на интервалах $\left(\frac{2a+l_1}{L}, \frac{2\pi}{N}, \frac{3a+l_1}{L}, \frac{2\pi}{N}\right)$, $\left(\frac{3a+l_1+l_2}{L}, \frac{2\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}\right)$. С учетом этого градиент представим периодической ступенчатой функцией вида

$$n(\tau) = \frac{8n}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} g\nu \cos \nu(\tau - \tau_1), \tag{1}$$

где $\tau = NY$, $\tau_1 = \frac{2a+l_1}{L}\pi$, $g_\nu = \sin^2 \nu\pi \frac{a}{L} \cdot \sin \nu\tau_1/\nu$.

Возьмем, например, середину первого магнита; тогда $\varphi = \frac{a\pi}{LN}$ и после суммирования в (1) получим, что $n(\tau) = n$. Если взять середину второго свободного от поля участка, то $\varphi = \frac{3a+l_1+l_2/2}{L}, \frac{2\pi}{N}$ и $n(\tau) = 0$ и т. д. В точках разрыва функции $n(\tau)$ имеем 0, $n/2$, $-n/2$.

Уравнения малых бетатронных колебаний будут иметь следующий вид:

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}+\frac{1}{N^2}\left[1-(1+k)^2\cdot n(\tau)\right]\cdot\zeta=0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2}+\frac{(1+k)^2}{N^2}\cdot n(\tau)\cdot z=0, \tag{3}$$

где $\zeta=r-R_0$.

На свойства излучения влияют только аксиальные колебания, поэтому можно ввести ряд упрощений для радиального движения. Будем считать, что электрон совершает круговое вращение с радиусом R_0 и усредним по периоду ведущее магнитное поле H_0. Тогда угловая скорость

$$\dot\varphi=\frac{\omega_0}{1+k}\left[1-\frac{\zeta}{R_0}+\frac{3}{2}\frac{\zeta^2}{R_0^2}+\frac{3}{2}\frac{\zeta^2}{R_0^2}+\int n(\tau)\cdot\left(\frac{z\dot z}{R^2}-\frac{\zeta\dot\zeta}{R^2}\right)dt\right],$$

где $\omega_0=ceH_0/E$.

Частные решения (например, уравнения (3)) будем искать как $\exp(i\gamma_z\tau)\cdot\varphi_z(\tau)$, где функция $\varphi_z(\tau)$ имеет период 2π. В области устойчивости $\mathrm{Im}\gamma_z=0$. Для $\varphi_z=0$. Для $\varphi_z(\tau)$ из (3) имеем:

$$\frac{d^2\varphi_z}{d\tau^2}+2i\gamma_z\frac{d\varphi_z}{d\tau}+\left[\frac{(1+k)^2}{N^2}\cdot n(\tau)-\gamma_z^2\right],\qquad \varphi_z=0.$$

Разложим здесь φ_z и γ_z по степеням параметра I/N. В полученном соотношении приравняем нулю члены одного порядка малости и придем к цепочке дифференциальных уравнений, которая дает возможность построить асимптотическое решение в виде:

$$z=B\left[\cos\left(\frac{\nu_z}{N}\tau+\psi\right)(1+S_1+F)+\nu_z\sin\left(\frac{\nu_z}{N}\tau+\psi\right)\cdot S_2\right], \tag{4}$$

где

$$S_1=\frac{8n(1+k)^2}{\pi N^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g\nu}{\nu^2}\cos\nu(\tau-\tau_1),$$

$$S_2=\frac{16n(1+k)^2}{\pi N^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g\omega}{\nu^3}\sin\nu(\tau-\tau_1),$$

$$F=\frac{8n^2(1+k)^4}{\pi^2N^4}.$$

$$\cdot\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g^2\nu}{\nu^4}\cos 2\nu(\tau-\tau_1)+4\sum_{\nu=1}^{\infty}g_\mu\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g\nu}{\nu^2}\left(\frac{\cos(\mu+\nu)(\tau-\tau_1)}{(\mu+\nu)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\cos(\mu-\nu)(\tau-\tau_1)}{(\mu-\nu)^2}\right)\right],\qquad \mu\neq\nu.$$

Частота $\nu_z=\pi n\sqrt{1+k}/2\sqrt{3}N$, она соответствует набегу фазы $\mu_z=\frac{2\pi}{N}\nu_z$ (6.19) в [5].

Для (2) соответствующее решение с точностью до I/N^4 запишется в следующей форме:

$$\zeta=A\Big[\cos\left(\frac{\nu\zeta}{N}\tau+\chi\right)\times$$

$$\times\left(1-S_1-\frac{32n(1+k)^2}{\pi N^4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g\nu}{\nu^4}\cos\nu(\tau-\tau_1)+F\right)-$$

$$-\sin\left(\frac{\nu_\zeta}{N}\tau+\chi\right)\cdot S_2\Big],\quad \nu_\zeta=\sqrt{1+\nu_z^2}\approx\nu_z. \qquad (5)$$

Если в (4) и (5) провести усреднение по периоду, то останутся только первые слагаемые; следовательно, A и B являются амплитудами основных синусоидальных движений, а χ и ψ — их начальными фазами.

Суммы, входящие в S_1 и S_2 можно выразить через многочлены Бернулли; например, сумма из S_1 будет равна

$$\frac{\pi^3}{12}\Big[2\cdot B_3(x)-2\cdot B_3\left(x-\frac{2a+l_1}{L}\right)-B_3(x-\frac{a}{L})-$$

$$-B_3(x+\frac{a}{L})+B_3(x-\frac{3a+l_1}{L})+B_3(x-\frac{a+l_1}{L})\Big],$$

где $B_3(z)=z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{1}{2}z$, $x=\frac{\tau}{2\pi}$.

Если в каком-то многочлене аргумент превышает 1, то нужно переходить к другому периоду.

Для протона в выражении для $\dot\varphi$ справа нужно изменить знак.

Задачу об излучении электрона рассмотрим в квазиклассическом случае [6,7], когда учитывается квантовая отдача при испускании фотона, но пренебрегается квантовым переходом электрона с уровня на уровень в магнитном поле.

Направление вектора излучения $\varkappa=\omega\mathbf{n}/c$ определим как $\mathbf{n}=\{0,\sin\theta,\cos\theta\}$, а векторы линейной поляризации как

$e_\sigma = \{1,0,0,0\}$, $e_\pi = \{0, \cos\theta, -\sin\theta\}$, где θ — сферический угол. Тогда компоненты интенсивности излучения можно представить в виде:

$$\frac{dW_\sigma}{d^3\varkappa} = \frac{ce^2}{(2\pi)^3 R_0}\frac{\nu'}{\nu}\left|\int dt \cdot V_x \cdot \exp\left(i\frac{\nu'}{\nu}(\omega t - \varkappa \mathbf{r})\right)\right|^2, \qquad (6)$$

$$\frac{dW_\pi}{d^3\varkappa} = \frac{cl^2}{(2\pi)^3 R_0}\cdot\frac{\nu'}{\nu}\times$$

$$\times\left|\int dt\,(V_y\cos\theta - V_z\sin\theta)\exp\left(i\frac{\nu'}{\nu}(\omega t - \varkappa\mathbf{r})\right)\right|^2,$$

где $\nu' = \nu(1 + h\omega(E))$, $\omega = \nu\omega_0$.

Свойства излучения рассмотрим с точностью до I/N^2, для этого в асимптотиках (4), (5) ограничимся порядком I/N^3. Малыми величинами в данной теории являются τ, mc^2/E, $\cos\theta$, A/R_0, B/R_0. Тогда фаза

$$\omega t - \varkappa\mathbf{r} = \nu\left[\frac{\omega_0 t}{1+k} - \frac{\omega_0 R}{c}\left(1 + \frac{\zeta}{R_0}\right)\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right)\sin\theta - \frac{z}{R_0}\cos\theta\right].$$

Как видим отсюда, помимо ζ и z, нужно еще найти $\frac{\omega_0 R}{c}$ и φ. Определяя, кроме того, проекции скорости и используя подстановку

$$\frac{\omega_0 t}{1+k} = \omega_0 t_1 - \frac{A}{R_0}\sin\chi\left(\frac{\nu_\zeta^2 - 1}{\nu_\zeta} + \nu_\zeta\frac{\pi^2 n}{8N^2}\frac{l_2 - l_1}{L}\right) -$$

$$-\frac{A}{R_{00}}\cos\chi\cdot\frac{\pi n(1+k)}{2N},$$

получим из (6) после интегрирования по времени формулы, которые будут описывать спектрально-угловые распределения и не будут уже зависеть от радиальных колебаний.

Добавляя случай круговой поляризации, можно записать более общую формулу:

$$\frac{dW_i(\nu)}{d\Omega} = \frac{ce^2\nu\nu'}{12\pi'' R_0^2}\int_0^{2\pi} d\psi\left[\lambda_2\varepsilon_1 K_{2/3}\left(\frac{\nu'}{3}\varepsilon_1^{3/2}\right) -\right.$$

$$-\lambda_3(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{1/2}\cdot K_{1/3}\left(\frac{\nu'}{3}\varepsilon_1^{3/2}\right)\Big]^2, \tag{7}$$

где

$$\varepsilon_1 = 1-\beta^2+\varepsilon_2, \beta=\frac{V}{c}, \quad \varepsilon_2=\left[\cos\theta-\nu_{\mathrm{ver}}\frac{B}{R_0}\cos(\psi+\psi_0)\right]^2,$$

$$\nu_{\mathrm{ver}}=\frac{\pi n\sqrt{1+k}}{\sqrt{3}N}\sqrt{1+\frac{3}{4}K+\frac{\pi^2 n}{16N^2}\frac{l_1-l_2}{L}},$$

$$\cos\psi_0=\frac{\pi n(1+k)}{2N\cdot\nu_{\mathrm{ver}}}.$$

При $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$ из (7) получим интенсивность для $i=\sigma$ компоненты линейной поляризации; при $\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$ — для $i=\pi$ компоненты; при $\lambda_2=-\lambda_3=1/\sqrt{2}$ — для правой круговой поляризации ($i=1$); при $\lambda_2=\lambda_3=1/\sqrt{2}$ — для левой круговой поляризации ($i=-1$).

Если $l_1=l_2$, то переходим к модели, где длины прямолинейных участков совпадают.

Методы вычисления интегралов, входящих в (7), рассмотрены в [3].

Экперименты, подобные тем, которые выполнили Ф.А. Королев и О.Ф. Куликов для слабофокусирующего магнитного поля [1], по-видимому, не проводились. Тем не менее, формулы (7) дают возможность построить графики и проводить предварительный анализ ожидаемых результатов. Возьмем, например, модель, где энергия электрона $E=5$ Гэв, усредненная амплитуда вертикальных колебаний $B=0.3$ мм, $N=24$, длина волны излучения $\lambda=10\mathring{A}$, $R=25$ м, $n=115$, $a=1.6$ м, $l_1=1_2=1.3$ м. Тогда $k=0.4$ и $R_0=35$ м.

Если принять интенсивность σ-компоненты для однородного магнитного поля за 1, то для рассматриваемого случая она будет равна по расчетам 0.93; для π — компоненты вместо нуля получим 0.16.

Список литературы

[1] Синхротронное излучение / Сб. под ред. А.А. Соколова и И.М. Тернова. М.: Наука, 1966. 228 с.

[2] *Жуковский В.Ч., Шишанин О.Е.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 1371–1378.

[3] *Шишанин О.Е.* // **ЖЭТФ. Т. 103. С. 1117–1126.** 57. В. 12. С. 772–776.

[4] *Шишанин О.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57. В. 12. С. 772–776.

[5] *Брук Г.* Циклические ускорители заряженных частиц.М.: Атомиздат. 1970. 311 с.
[6] *Schwinger J.* // Proc. Nat. Acad. Sci. 1954. V. 40. P. 132.
[7] *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука. 1980. 704 с.

Поступило в Редакцию
8 июля 1994 г.