

01;07
©1994

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Ф.Х.Абдуллаев, Б.Б.Байзаков, Б.А.Умаров

Динамика оптических солитонов в неоднородных средах в настоящее время является предметом активных исследований. Интерес обусловлен как фундаментальным значением самого явления, так и широким спектром практических приложений, в частности для передачи и хранения информации по волоконно-оптическим линиям связи.

Реальные оптические волокна, как известно, в той или иной степени неоднородны и, кроме того, параметры начального импульса могут несколько отличаться от точного солитонного. Поэтому вопрос о распространении солитоноподобного импульса в неоднородном оптическом волокне представляется важным. В работе [1] исследована динамика солитоноподобного импульса в периодически неоднородном световоде, а в [2] найдены условия резонансного разрушения оптических солитонов в таких средах. Целью настоящей работы является изучение динамики солитоноподобного импульса в среде со случайно изменяющейся дисперсией.

В стандартных безразмерных переменных огибающая электромагнитного поля световой волны в оптическом волокне с переменной дисперсией описывается уравнением [1,3]

$$iu_z + \frac{1}{2}\alpha(z)u_{tt} + |u|^2u = 0, \quad (1)$$

где: z — расстояние, t — бегущее время, $u = (\gamma t_0^2 / |\beta_2|)^{1/2} A$, $z = z/l_d$, $t = t/t_0$, $l_d = t_0^2 / |\beta_2|$, $\gamma = (n_2 \omega_0) / (cA_{\text{эф}})$, n_2 — значение керровской части коэффициента преломления, ω_0 — частота несущей волны, t_0 — длительность начального импульса, $A_{\text{эф}}$ — эффективный радиус модального пятна, β_2 — коэффициент дисперсии второго порядка, A — напряженность электрического поля.

Лагранжиан, соответствующий уравнению (1), имеет вид

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}i(u_z u^* - u^* u) - \frac{1}{2}\alpha(z)|u_t|^2 + \frac{1}{2}|u|^4 \right) dt. \quad (2)$$

Уравнения динамики для параметров импульса могут быть получены из этого лагранжиана вариационным методом. В качестве пробной функции для солитоноподобного импульса выбирается выражение

$$u = A(z)\operatorname{sech}(t/x(z)) \exp \{i [\varphi(z) + b(z)t^2]\}, \quad (3)$$

где $A(z)$, $x(z)$ — амплитуда и ширина импульса соответственно, $\varphi(z)$ — фаза, $b(z)$ описывает чирп частоты.

Подставляя (3) в (2) из соответствующего уравнения Лагранжа, можно получить систему уравнений для параметров импульса, из которой мы рассмотрим только относящееся к ее ширине [1]:

$$x'' - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)x' = \frac{\alpha^2}{x^3} - \frac{\alpha N^2}{x^2}, \quad (4)$$

где штрих означает дифференцирование по " z'' ", который в наших уравнениях играет роль времени " t'' ", а N^2 — константа интегрирования, характеризующая интенсивность начального импульса. Уравнение (4) совпадает по форме с уравнением колебаний частицы единичной массы в ангармоническом потенциале при наличии зависящего от времени силы трения (α'/α). Ниже мы будем предполагать, что параметры среды распределены случайно по закону

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= 1 + \varepsilon(t), & \langle \varepsilon(t) \rangle &= 0, \\ \langle \varepsilon(t)\varepsilon(t') \rangle &= \sigma^2 \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где τ — корреляционная длина, σ — модность случайной величины.

Исследование стохастического нелинейного дифференциального уравнения (4) в общем случае является сложной математической задачей. Для получения аналитических оценок в пределе слабого шума используем ниже метод линеаризации.

Случайная сила с малой амплитудой $\varepsilon \ll 1$ слабо возмущает гармоническое колебание эффективной частицы вблизи дна потенциальной ямы $x_0 = 1/N^2$, которое может быть представлено в виде

$$x = x_0 + q \sin(\omega t) + y(t), \quad y \ll 1, \quad (6)$$

где $q, \omega = N^4$ — амплитуда и частота малых колебаний.

Линеаризованное уравнение для $y(t)$, полученное из (4), имеет вид

$$y_{tt} + \omega^2 y = \varepsilon_t q \omega \cos(\omega t) + \varepsilon \omega^3 / 2. \quad (7)$$

Статистические характеристики $y(t)$ могут быть оценены вычислением интегралов типа

$$\langle y(t)^2 \rangle = \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \int_0^t \sin \omega(t-t') \sin \omega(t-t'') \langle F(t') F(t'') \rangle dt' dt'', \quad (8)$$

где $F(t)$ — правая часть уравнения (7).

Используя выражения (5) для характеристик случайной величины $\varepsilon(t)$, несложно получить явные формулы для $\langle y(t)^2 \rangle$ и $\langle y_t(t)^2 \rangle$, которые, однако, не будем приводить ввиду их громоздкости. Здесь лишь отметим, что из структуры формулы для $\langle y(t)^2 \rangle$ может быть явно выделен член, соответствующий диффузионному росту

$$\langle y(t)^2 \rangle = t(\sigma^2 \omega \tau) \left(\frac{q^2}{1 + (2\omega\tau)^2} + \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \right). \quad (9)$$

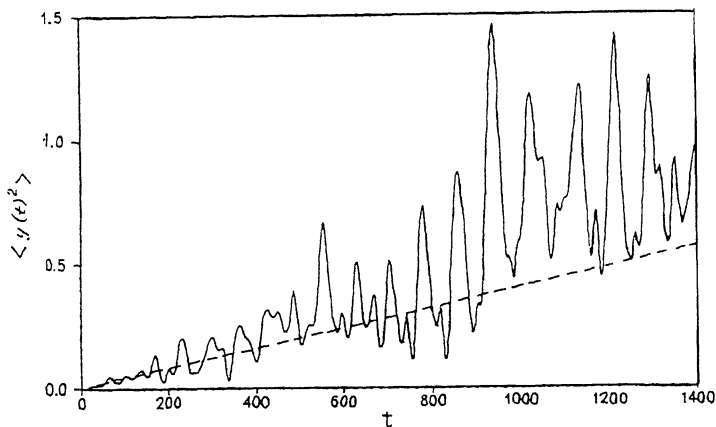
Из этого выражения может быть оценено время разрушения солитона при распространении в среде со случайными параметрами, определяемыми $\varepsilon(t)$. Определим время разрушения солитона t_k как время, при котором ширина солитона становится сравнимой с полушириной потенциальной ямы [4]. Тогда имеем

$$\langle y(t)^2 \rangle \geq \omega^{-2},$$

$$t_k = \left[\sigma^2 \omega^3 \tau \left(\frac{q^2}{1 + (2\omega\tau)^2} + \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \right]^{-1}. \quad (10)$$

Очевидно, такая оценка не учитывает ряда особенностей движения солитона в неоднородной среде и может быть принята лишь как довольно грубое приближение. Более детальная картина поведения оптического солитона в случайно-неоднородном волокне может быть получена при непосредственном численном моделировании стохастического дифференциального уравнения (4).

При численном решении уравнения (4) мы использовали процедуру Дормана-Принса [5] с автоматическим управлением длиной шага, интегрирования и контролем относительно точности на уровне 10^{-8} . На рисунке представлено сравнение $\langle y^2(t) \rangle$, полученного из численного решения



Стохастические колебания ширины оптического импульса под действием случайного возмущения (5): $\sigma = 0.03$, $\omega = 0.1$, $q = 0.05$, $\tau = 20/\pi$; штриховая линия — диффузионный рост, оценка по формуле (9).

стохастического уравнения (4) с аналитической оценкой по формуле (9). Видно, что эффективная частица с течением времени все более отдаляется от положения равновесия, совершая нерегулярные колебания с нарастающей амплитудой. В случае малой интенсивности случайной силы характер поведения частицы определяется главным образом потенциальной ямой, что проявляется в сохранении основной частоты $\omega = N^4$. Наблюдается слабое нерегулярное поведение, которое с увеличением ε становится более хаотическим. Частица остается в пределах потенциальной ямы.

С увеличением интенсивности случайной силы частица приобретает более заметное стохастическое ускорение. Траектория его движения простирается до краев потенциальной ямы, и при достижении кинетической энергии большей, чем потенциальной, частица может покинуть ее, что соответствует стохастическому разрушению солитона. Для случая достаточно большой интенсивности случайной силы на кривых наблюдаются участки, где поведение частицы полностью определяется случайной силой, хотя сама частица находится в пределах потенциальной ямы. Эти участки, соответствующие захвату частицы в нелинейный параметрический резонанс, будут предметом отдельного рассмотрения.

Проведем оценку для величины эффектов в оптических волокнах со случайной дисперсией. Для импульсов длительностью $t_0 = 0.1$ пс, $l_d = 8$ м и $\tau = 0.8$ м, $\beta_2 = -20$ пс²/км,

$\gamma = 2/(\text{Вт/км})$, при $|\Delta\beta_2| = 2 \text{ пс}^2/\text{км}$ имеем из (10) длину разрушения порядка 1 км.

В заключение отметим, что форма солитона, распространяющегося в случайно-неоднородной среде, испытывает квазигармонические нерегулярные колебания при малой интенсивности случайной силы. С увеличением интенсивности амплитуда колебаний возрастает, ширина солитона непрерывно увеличивается и по истечении некоторого времени полностью разрушается. Время развала солитона может быть сильно сокращено при совпадении частоты его собственных колебаний с соответствующим резонансным значением в спектре случайной силы.

Список литературы

- [1] *Malomed B.A., Parker D.F., Noel F.S.* // Phys. Rev. E. 1993. V. 48. N 2. P. 1425-1428.
- [2] *Abdullaev F., Caputo J.G., Flytzanis N.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49 (in press).
- [3] *Agrawal G.* Nonlinear Fiber Optics. N.Y., 1990.
- [4] *Кившарь Ю.С., Кононов В.В.* // Квантовая электроника. 1990. Т. 17. В. 12. С. 1599-1602.
- [5] *Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equation. Heidelberg, 1987.

Научно-производственное
объединение
"Физика-Солнце"
Ташкент

Поступило в Редакцию
14 мая 1994 г.