

01;09
©1994

МОДЕЛЬ ДИССИПАТИВНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ВИДЕ ОДНОМЕРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С ТРЕМЯ ПАРАМЕТРАМИ

Б.П.Безручко, М.Д.Прохоров, Е.П.Селезнев

1. Проблема построения динамических моделей нелинейных систем по временной зависимости экспериментально наблюдаемой переменной привлекает к себе большое внимание [1,2]. В настоящей работе она рассматривается применительно к системам, которые совершают квазигармонические затухающие колебания около положения равновесия и периодически подталкиваются внешней импульсной силой. Нелинейность определяется тем, что характерный временной масштаб колебаний на интервалах времени, когда система представлена самой себе, определяется значением наблюдаемой переменной в момент окончания импульса воздействия. Ниже построено одномерное точечное отображение, моделирующее сложную динамику такого осциллятора при условии, что за время импульса воздействия в систему вносится сильная диссипация. Предложена процедура определения параметров модели по данным эксперимента. Численно исследована структура разбиения пространства трех параметров (неравновесности, диссипации, частоты воздействия) на области существования различных колебательных состояний. Показано, что построенная модель отражает некоторые универсальные элементы конфигурации бифуркационных множеств в пространстве параметров реальной электрической системы (LR цепи с варакторным диодом [3,4]) и дифференциальных уравнений возбуждаемых диссипативных нелинейных осцилляторов [6,7]).

2. Рассмотрим диссипативный осциллятор, временная зависимость отклонения x от положения равновесия которого имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0(1 + \beta x_0)}\right), \quad (1)$$

где x_0 — начальное отклонение, T_0 — условный период колебаний при $x_0 \rightarrow 0$, постоянная δ характеризует затухание, а β — нелинейность. Воздействуем на систему в момент t'_n так, чтобы по окончании воздействия ($t = t''_n$) колебания продолжались по закону (1), но с новым $x_0 = x(t'_n) + A$,

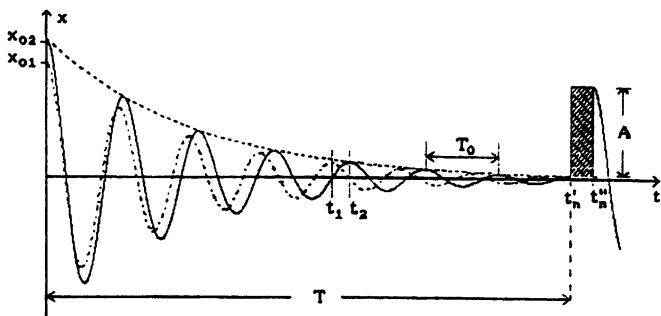


Рис. 1. Временная реализация колебаний рассматриваемого нелинейного осциллятора при импульсном возбуждении.

рис. 1. Это соответствует тому, что за время $(t''_n - t'_n)$ система "забывает" о скорости изменения переменной в момент импульса.¹ Если воздействие повторяется через интервал времени T , в течение которого система предоставлена самой себе, то "вынужденные" колебания состоят из последовательности равных по длительности цугов затухающих квазигармонических колебаний. Длительность самих импульсов воздействия $(t''_n - t'_n)$ не принципиальна, но мы для простоты и определенности далее положим импульсы одинаковыми и короткими $t''_n - t'_n \ll T$.

Для построения модельного отображения последовательно выделим на временной реализации колебательного процесса точки, разделенные интервалом T (произведем стробирование), и установим функциональную связь между последовательными значениями x_n . Вид отображения последования и его размерность зависят от выбора момента стробирования, что эквивалентно замене переменных. Наиболее простое одномерное мультимодульное отображение получается в случае, когда сопоставляются значения $x(t)$ в моменты начала цугов. В безразмерном трехпараметрическом виде оно имеет вид

$$z_{n+1} = 1 + \frac{1}{A_1} 2z_n \cos \left(\frac{1}{A_2(1 + A_3 z_n)} \right), \quad (2)$$

где $z_n = x_n/A$, $A_1 = \exp(\alpha T/T_0)$ характеризуют уровень диссипации за период воздействия ($\alpha = \delta T_0$), $A_2 = T_0/2\pi T$ является нормированной частотой воздействия, $A_3 = \beta A$ выступает как параметр неравновесности.

3. Уравнение (2) имеет как регулярные (с периодом, кратным T), так и хаотические решения, которым в фазовом

¹ Для механического маятника такое возбуждение можно реализовать с помощью неупругого взаимодействия с массивным телом.

пространстве соответствуют циклы и странные аттракторы. На рис. 2, *a* раскраской показаны колебательные состояния, которые устанавливаются в системе, если двигаться в плоскости в направлениях, указанных *стрелками*. Переход к хаосу происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода. В *центре* рисунка приведен объемный вид наиболее точной конфигурации бифуркационных множеств. В пространстве параметров ей соответствуют три поверхности. На двух из них, гладких поверхностях 1 и 2, происходит бифуркация удвоения двух различных циклов одного периода (мультипликаторы $\mu = -1$). На противоположных сторонах третьей поверхности (3 на рис. 2, *a*) мультипликаторы этих циклов равны $+1$. Внутри этой поверхности имеет место мультистабильность — существование в фазовом пространстве модели нескольких аттракторов. При значительном уровне диссипации (больших A_1) поверхности 1 и 2 разделены в пространстве параметров. С уменьшением A_1 они пересекаются и все больше и больше проникают друг в друга. Описанная универсальная конфигурация бесконечно дублируется в пространстве параметров, затрагивая все циклы от периода 1 и выше, в том числе и в “окнах” периодичности в области хаоса. Это иллюстрирует рис. 2, *b-d*, на которых показаны элементы внутреннего устройства произвольно выбранной области *c*, ограниченной поверхностью бифуркации удвоения периода. Такое взаимное расположение линий $\mu = -1$ и $+1$ на плоскости параметров уже наблюдалось в мультимодальных точечных отображениях и дифференциальных уравнениях и известно под названием “crossroad” [8,9].

4. Параметры модели (2) могут быть непосредственно определены по экспериментальной осциллограмме временной реализации переменной $x(t)$ (рис. 1) с помощью приведенных на рисунке обозначений. Значение α находится из экспоненциальной аппроксимации огибающей, которая выделена на осциллограмме штрихами. Величина β определяется из соотношения: $\beta = (t_2 - t_1)/(t_1 x_{02} - t_2 x_{01})$, где t_1 и t_2 — моменты времени, соответствующие некоторому фиксированному значению фазы колебаний (например, экс-

Рис. 2. Структура разбиения пространства параметров модели 2 на области существования различных колебательных состояний.

a — сечения плоскостями $A_1 = \text{const}$ и объемный вид наиболее характерной конфигурации бифуркационных множеств. *Внизу* приведены условные обозначения для областей колебаний, период которых указан в единицах T , и хаоса. *b* — устройство области, обозначенной на *a* буквой *c*. *Сплошные* — линии бифуркаций удвоения периода (мультипликатор равен -1), *штриховые* — линии седло-узловых бифуркаций (мультипликатор равен $+1$), *цифры* — период предельного цикла, рождающегося на соответствующей линии. *d* — увеличенный фрагмент *a*, выделенный прямоугольником.

тремуму зависимости $x(t)$, как на рис. 1) для различных начальных амплитуд колебаний x_{01} и x_{02} .²

5. Было проведено сравнение результатов численного исследования модели и физического эксперимента с "электрическим маятником" — LR диод цепью [3-5], возбуждаемой импульсами "прямого" тока. При таком способе воздействия происходит инжекция неосновных носителей заряда в базу диода и его активная проводимость возрастает, что резко увеличивает потери энергии в системе. Несмотря на неизохронность электрического осциллятора, отмечено достаточно хорошее качественное совпадение его поведения и модели в области частот воздействия ниже линейной резонансной. В области более высоких частот особенности экспериментальной системы моделью не описываются.

Выражаем признательность Д.И.Трубецкову за полезные обсуждения работы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-02-16171.

Список литературы

- [1] *Casdagli M.* // *Physica D.* 1989. V. 35. P. 335-356.
- [2] *Gouesbet G., Maquet J.* // *Physica D.* 1992. V. 58. P. 202-215.
- [3] *Klinker T., Meyer-Pse W., Lauterborn W.* // *Phys. Lett.* 1984. V. 101A. N 8. P. 371-375.
- [4] *Baxter J., Bocko M., Douglass D.* // *Phys. rev. A.* 1990. V. 41. N 2. P. 619-625.
- [5] *Кузнецов А.А.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1990. Т. 33. В. 2. С. 182-190.
- [6] *Parlitz U., Scheffczyk C., Kurz T., Lauterborn W.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. V. 1. N 1. P. 261-264.
- [7] *Scheffczyk C., Parlitz U., Kurz T., Knop W., Lauterborn W.* // *Phys. Rev. A.* 1991. V. 43. N 12. P. 6495-6502.
- [8] *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. V. 1. N 1. P. 183-196.
- [9] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34. В. 10-12. С. 1079-1115.

Институт радиотехники
и электроники
Саратовский филиал

Поступило в Редакцию
17 февраля 1994 г.

² При использовании (2) в качестве модели неизохронного осциллятора измеренное таким способом значение β будет зависеть от величины интервалов t_1, t_2 . Их целесообразно выбирать такими, чтобы число осцилляций за это время было близко T/T_0 в моделируемой системе.