

01;05
©1994

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ОГРАНИЧЕННОМУ УГЛОВОМУ ИНТЕРВАЛУ ПРОЕКЦИОННЫХ ДАННЫХ

А.Х.Хожонов, З.М.Шибзутов

Задача восстановления поперечного среза объекта по совокупности проекционных данных с ограниченным угловым ракурсом возникает в астрофизике, рентгеновской и просвечивающей электронной микроскопии, радиационной дефектоскопии, медицине. Наш подход основывается на использовании схемы сканирования параллельным потоком проникающего излучения, максимально упрощающей алгебраическое решение обратной задачи.

Математическая формулировка проблемы сводится к следующей задаче [1]. Требуется восстановить функцию $f(\mathbf{x})$, заданную в ограниченной области Ω по множеству значений интегралов (проекций) по прямым, лежащим в Ω :

$$Rf(\theta, s) = \int f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{n}\mathbf{x} - s)d\mathbf{x}, \quad (1)$$

где $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$, угол θ и расстояние s — параметризуют прямые, вдоль которых осуществляется вычисление интеграла (направления сканирования), $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Сведение интегрального уравнения (1) к системе линейных алгебраических уравнений проводится путем дискретизации задачи. Обозначим через n число разбиений сторон квадрата, включающего в себя исследуемую область. Будем считать функцию $f(\mathbf{x})$ постоянной в каждой клетке — элементе изображения σ_k , где введен двойной индекс $k = \{i, j\}$ (i и j нумеруют строку и столбец, содержащие σ_k). Функция $f(\mathbf{x})$ заменяется на вектор \mathbf{f} с компонентами f_k ($k = 1, 2, \dots$), $n \times n$:

$$f_k = \int f(\mathbf{x})d\mathbf{x}/s_k, \quad (2)$$

где s_k — площадь элемента изображения σ_k .

Обозначим через L_{mk} длину пересечения m -го луча с σ_k . В итоге уравнение (1) примет следующий вид:

$$L_{mk}f_k = g_m. \quad (3)$$

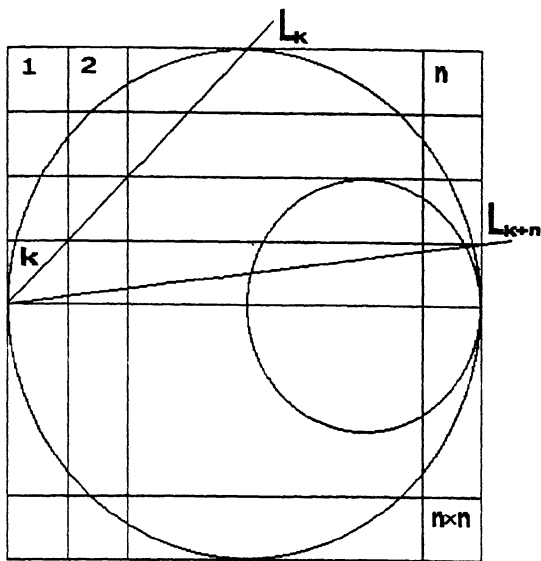


Рис. 1. Система лучей, используемая в T -схеме сканирования, и способ выбора обозначений.

Нетривиальность задачи нахождения решения системы уравнений (3) заключается в ее чрезвычайно высоком порядке ($\approx 10^4$) уже при реконструкции простых изображений 100×100 . Тем не менее выбор системы просвечивания может существенным образом упростить вид матрицы \hat{L} . Предлагаемая нами схема сканирования (называемая ниже T -схемой) сводит матрицу \hat{L} к нижней треугольной форме. Это позволяет сразу воспользоваться методом обратной подстановки или обратным ходом в методе Гаусса для последовательного нахождения всех компонент искомого вектора изображения f .

Просвечивание предполагается осуществлять системой параллельных лучей с выбором направлений θ_m по правилу

$$\operatorname{tg} \theta_m = m \operatorname{Mod}(n), \quad (4)$$

где m нумерует направления просвечивания $m = 1, \dots, n \times n$. Выбор системы лучей и обозначений показан на рис. 1. Заметим, что для каждого угла θ_m величины отличных от нуля элементов матрицы L_{mk} совпадают и равны значению d_m :

$$d_m = h \left(1 + 1/\operatorname{tg}^2 \vartheta_m \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Разделив каждое уравнение системы (3) на соответствующее значение d_m , получим систему с матрицей, отличные от нуля элементы которой равны единицам.

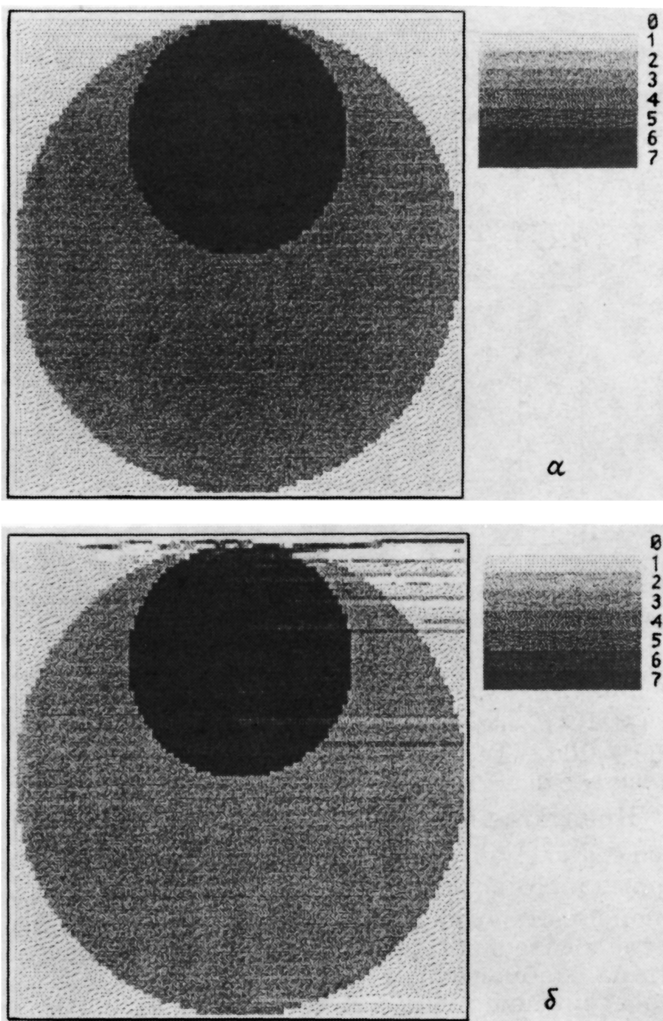


Рис. 2. Результаты томографической реконструкции объекта, при построении изображения с разрешением 100×100 .

a — исходный объект, *б* — реконструированное изображение при относительной погрешности измерений проекционных данных 0.1%.

Рассматриваемая нами проблема решения системы уравнений (3) относится к классу некорректных по Тихонову задач [2]. Особенностью подобных задач является сильная зависимость решения от правой части (проекционных данных), которая находится в результате выполнения томографического эксперимента и не может быть точ-

но измерена вследствие квантовой природы процесса поглощения проникающих излучений в исследуемом объекте. Для выполнения компьютерного эксперимента мы взяли объект с поперечным сечением, показанным на рис. 2,а, где искомая функция $f(x)$ принимает значения из набора $F = \{1, 3, 7\}$. Результат томографической реконструкции приведен на рис. 2,б для случая, когда проекционные данные известны с точностью 0.1%. Помимо влияния возмущений правой части системы уравнений (3) на искомое решение, разрешающая способность T -схемы сканирования ограничивается возможностями углового разрешения отдельных лучей. Для получения соответствующего ограничения на угловое разрешение отдельных лучей найдем минимальный угловой интервал между двумя измерениями. При больших значениях n для $\delta\theta_n = \theta_n - \theta_{n-1}$ имеем $\delta\theta_n = \arctg(n) - \arctg(n-1) \simeq 1/n(n-2)$. Таким образом, для рассматриваемого нами случая $n = 100$ угловое разрешение должно превышать $\delta\vartheta_{100} = 20''$, что для практической реализации предполагает наличие высокопараллельного потока проникающего излучения.

Наиболее существенным для возможных приложений является то, что T -схема использует направления просвечивания в ограниченном угловом ракурсе, равном $\alpha = \vartheta_n - \vartheta_1$. Для рассмотренного нами примера $\alpha = 45^\circ$. Угловым ракурсом можно уменьшить, если выбрать элементы изображения в форме вытянутых в одном направлении прямоугольников, что, однако, потребует выполнения более прецизионных угловых измерений.

Приведенная нами схема позволяет решать задачу о реконструкции внешних областей объектов, обходясь проекционными данными для лучей, проходящих лишь через исследуемые фрагменты, без выполнения просвечивания всего объекта полностью, как это требуется в случае применения интегральных методов обращения преобразования Радона с угловым ракурсом для проекционных данных $\alpha = 180^\circ$. Примерами такого рода могут служить сканирование объекта в плоскости перпендикулярной к плоскости подложки, на которой он крепится, или сканирование приповерхностных фрагментов выпуклых областей.

Список литературы

- [1] *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 279 с.
- [2] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 279 с.

Поступило в Редакцию
17 января 1994 г.
