

01;07;09;12

©1994

## О ТОЧНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ И БИСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

*Г.Н.Бочков, К.В.Горохов, И.Р.Коннов*

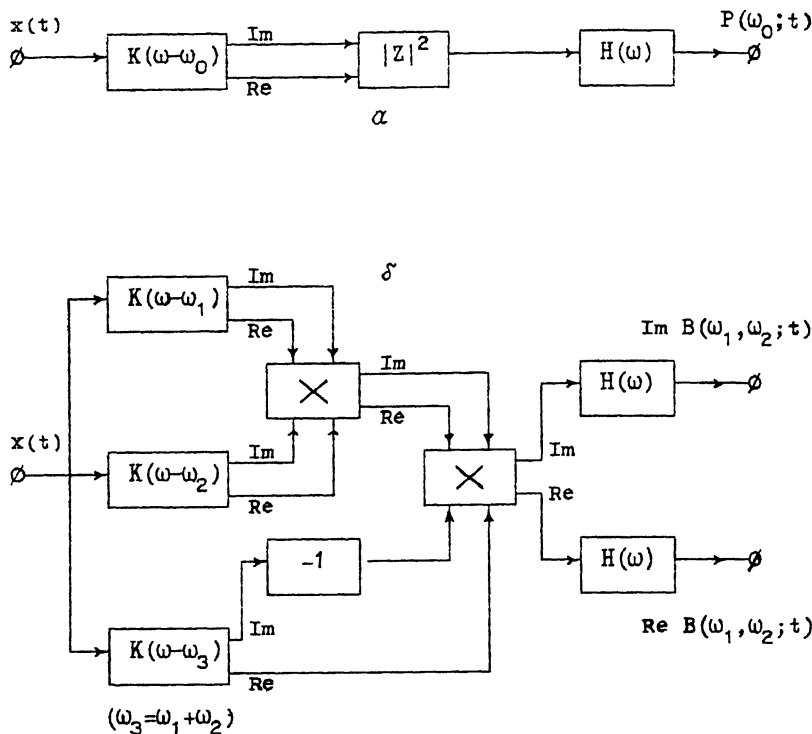
В последнее время при исследовании различных физико-технических процессов наряду с анализом их спектров мощности все большее внимание уделяется спектрам высших порядков (СВП) или полиспектрам. СВП позволяют получать принципиально новую информацию, являясь адекватным инструментом анализа нелинейных свойств, нелинейно-фазовых характеристик систем, статистик процессов переноса и т.д. (см., например, обзоры [1-3]). Большинство работ в этом направлении содержит материалы по вычислению, измерению и интерпретации простейшего из СВП — биспектра (спектра 3-го порядка). При этом недостаточно изученным остается принципиальный вопрос о точности оценивания СВП и соответственно о предельной чувствительности полиспектральных анализаторов как приборов нового поколения. В имеющейся литературе рассматриваются в основном асимптотические свойства оценок СВП при неограниченных объемах выборок [4-18] (что не всегда выполнимо при аппаратных оценках) или в грубом гауссовом приближении [9], хотя сами полиспектры свойственны именно негауссовым процессам. Цель данной работы — исследовать влияние негауссовых характеристик процесса на точность и оптимальность его спектральных и биспектральных оценок.

Как известно, одними из эквивалентных определений спектра мощности (в дальнейшем — спектра) и биспектра стационарного случайного процесса  $x(t)$  при  $\langle x(t) \rangle = 0$  являются соответственно

$$S_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |X_T(\omega, t)|^2 \rangle, \quad (1)$$

$$S_3(\omega_1, \omega_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle X_T(\omega_1, t) X_T(\omega_2, t) X_T^*(\omega_1 + \omega_2, t) \rangle, \quad (2)$$

где  $X_T(\omega; t) = \int_{t-T}^t x(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau$ , “\*” — комплексное сопряжение.



**Рис. 1.** Блок-схемы анализаторов спектра мощности (а) и биспектра (б):  $K(\omega - \omega_k)$  — узкополосный квадратурный фильтр с центральной частотой  $\omega_k$ ,  $|Z|^2$  — блок вычисления квадрата модуля комплексного сигнала, “ $\times$ ” — перемножитель комплексных сигналов,  $-1$  — фазоинвертор;  $H(\omega)$  — усредняющий ФНЧ.

Если процесс  $x(t)$  обладает свойством эргодичности, то в качестве операции усреднения, обозначаемой в (1,2) посредством угловых скобок, можно использовать усреднение по времени. В этом случае принципы действия спектра-анализатора и биспектрального анализатора могут быть описаны в рамках обобщенных блок-схем, изображенных на рис. 1, а, б, а оценки спектра и биспектра, получаемые с их помощью, могут быть выражены через параметры “выходных сигналов” соответствующих схем.

Пусть  $K(\omega - \omega_0)$  и  $H(\omega)$  — частотные характеристики узкополосного фильтра с центральной частотой  $\omega_0$  и усреднителя соответственно. Для процесса  $x(t)$  на выходах ана-

лизаторов получаем оценки спектра

$$P(\omega_0; t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_1 d\nu_2 H(\nu_1 + \nu_2) e^{i(\nu_1 + \nu_2)t} \times \\ \times K(\nu_1 - \omega_0) K(\nu_2 + \omega_0) X(\nu_1) X(\nu_2) \quad (3)$$

и биспектра

$$B(\omega_1, \omega_2; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \\ d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 H(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) e^{i(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)t} \times \\ \times K(\nu_1 - \omega_1) K(\nu_2 - \omega_2) K(\nu_3 + \omega_1 + \omega_2) X(\nu_1) X(\nu_2) X(\nu_3), \quad (4)$$

где  $X(\omega) = X_\infty(\omega, t)$  — спектральная составляющая процесса  $x(t)$ .

Нами был проведен анализ статистических свойств оценок (3) и (4) при использовании следующих упрощающих предположений:

1)  $x(t)$  — широкополосный стационарный эргодический процесс с такой  $\langle x(t) \rangle = 0$ , что его полиспектры  $S_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$  при  $n \leq 6$  достаточно слабо меняются в пределах узких полос фильтров;

2) эффективное время измерения  $T \equiv 2\pi |H(0)|^2 / \int |H(\omega)|^2 d\omega$  много больше длительности огибающей импульсного отклика фильтров.

Для отношений “сигнал/шум”, характеризующих точность спектральных и биспектральных измерений, можно получить в рамках указанных приближений следующие выражения:

$$\varepsilon_p^2(\omega_0) \equiv \frac{\text{var}[P(\omega_0, t)]}{\langle P(\omega_0, t) \rangle^2} = \frac{1}{T\Pi_{SP}} \cdot \{1 + \Pi_{SP}\gamma_4(\omega_0, -\omega_0, \omega_0)\}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_B^2(\omega_1, \omega_2) \equiv \frac{\text{var}[B(\omega_1, \omega_2; t)]}{|\langle B(\omega_1, \omega_2; t) \rangle|^2} =$$

$$= \frac{1}{T\Pi_{SB}|\gamma_3(\omega_1, \omega_2)|^2} \cdot \left\{ 1 + \delta_{1,2} + \Pi_{TB} \left[ \gamma_4(\omega_1, -\omega_1, \omega_2) + (1 + \delta_{1,2}) \right. \right.$$

$$\left. \left. (\gamma_4(\omega_1, -\omega_1, \omega_1 + \omega_2) + \gamma_4(\omega_2, -\omega_2, \omega_1 + \omega_2)) \right] + \right.$$

$$+ \Pi_{SB}^2 \gamma_6(\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2, -\omega_1, -\omega_2) \Big\}; \quad (6)$$

где  $\omega_0 \gg 2\pi \Pi_{SP}$ ;  $\omega_1, \omega_2 \gg 2\pi \Pi_{SB}$ ;  $\delta_{1,2} \equiv \delta(\omega_1, \omega_2)$  — символ Кронекера;

$$\Pi_{SP} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |K(\omega)|^2 \right\}^2 \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |K(\omega)|^4 \right\}^{-1}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{SB} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 W_B(\omega_1, \omega_2) \right\} \times \\ &\times \left\{ \int \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 |W_B(\omega_1, \omega_2)|^2 \right\}^{-1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

— эффективные статистические полосы спектрального и биспектрального анализа соответственно;

$$\begin{aligned} \Pi_{TB} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int \int_{-\infty}^{\infty} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 W_B(\omega_1, \omega_2) W_B^*(\omega_1, \omega_3) \right\} \times \\ &\times \left\{ \int \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 |W_B(\omega_1, \omega_2)|^2 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (8,9)  $W_B(\omega_1, \omega_2) \equiv K(\omega_1)K(\omega_2)K^*(\omega_1 + \omega_2)$  — функция биспектрального окна, а в (5,6)

$$\gamma_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \equiv \frac{S_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})}{[S_2(\omega_1) \dots S_2(\omega_{n-1}) S_2(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})]^{1/2}} \quad (10)$$

— показатели когерентности  $n$ -го порядка.

Выражения (5,6), учитывающие негауссовость процесса, устанавливают условия применимости известных асимптотических (при  $\Pi_{SP}, \Pi_{SB} \rightarrow 0$ ) формул для  $\varepsilon_P^2, \varepsilon_B^2$  и указывают на существование предела увеличения полосы анализа (и тем самым — ее оптимального значения), при котором для заданного времени измерения качество оценки перестает улучшаться. Вместе с тем, с точки зрения практики измерений, принципиальным фактом является то, что априори

оптимум может быть указан лишь при заранее известных более высоких статистических характеристиках процесса, чем измеряемая, что возможно только в рамках той или иной качественной статистической модели.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимальности измерений спектра и биспектра флуктуаций тока  $\delta I(t) = I(t) - \langle I \rangle$  многокаскадного фотоумножителя (ФЭУ) когерентного светового потока. Будем считать, что  $K(\omega) = (1 + i\omega/\alpha)^{-1}$  (при  $\Pi_{SP} = \Pi_{TB} = \alpha$ ,  $\Pi_{SB} \approx 1.15\alpha$ ), а  $H(\omega)$  — частотная характеристика идеального интегратора с временем интегрирования  $T$ . Пусть, так же как и в [10], ток ФЭУ  $I(t) = \sum q_k g(t - t_k)$  — пуассоновский импульсный случайный процесс, где  $g(t)$  — форма импульса с эффективной длительностью  $T_0 = 1/F_0$ , а усиление трубки ФЭУ описывается отрицательно-биномиальным распределением

$$p[q] = \binom{n - 1 + \frac{1}{b}}{n} (b\mu)^n (1 + b\mu)^{-(n + \frac{1}{b})},$$

где  $n = q/\epsilon$  — полное число электронов в импульсе,  $\mu$  — среднее усиление на каскад,  $b$  — параметр увеличения дисперсии вследствие неоднородностей. Из (5), (6) можно получить

$$\epsilon_P^2 L = D_P + \frac{\langle q^4 \rangle}{\langle q^2 \rangle^2} \frac{1}{R}, \quad (11)$$

$$\epsilon_B^2 L = \frac{\langle q^2 \rangle^3}{\langle q^3 \rangle^2} D_B^2 R + 3 \frac{\Pi_{TB} \langle q^2 \rangle \langle q^4 \rangle}{\Pi_{SB} \langle q^3 \rangle^2} D_B + \frac{\langle q^6 \rangle}{\langle q^3 \rangle^2} \frac{1}{R}, \quad (\omega_1 \neq \omega_2) \quad (12)$$

— соотношения, связывающие между собой при заданной точности  $\epsilon^2$  относительное время измерений  $L = T/T_0$ , разрешение  $D = F_0/\Pi_S$  и скорость счета фотонов  $R = n_0 T_0$  ( $n_0$  — среднее число импульсов в единицу времени). На рис. 2 для ФЭУ типа ЕМ16256 ( $\mu = 6.5$ ,  $b = 0.2$ ) [10] приведены зависимости времен спектральных и биспектральных измерений, обеспечивающих при заданном разрешении  $D = 10$  точность  $\epsilon = 10\%$ . Как видно из рис. 2, если при измерении спектра выгодны большие скорости счета  $R \rightarrow \infty$ , то при биспектральных измерениях существует оптимальное значение  $R \cong 0.32$ , при котором заданная точность достигается за минимальное время  $L \cong 6.2 \cdot 10^3$ .

Работа была частично поддержана Российским Фондом фундаментальных исследований (грант № 93-05-8126).

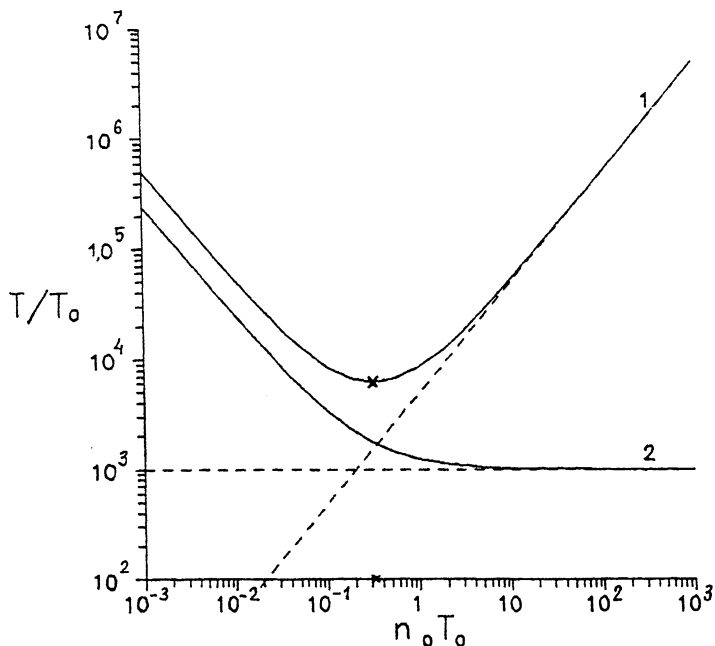


Рис. 2. Зависимости относительных времен биспектральных (1) и спектральных (2) измерений флуктуаций тока ФЭУ при заданных разрешении  $D = 10$  и точности  $\varepsilon = 10\%$  от скорости счета фотонов (пунктир — гауссовы асимптотики соответствующих зависимостей).

### Список литературы

- [1] Никуас Х.Л., Рагувер М.Р. // ТИИЭР. 1987. Т. 75. В. 7. С. 5-30.
- [2] Mendel J.M. // Proc. IEEE. 1991. V. 79. В. 3. Р. 278-305.
- [3] Александров Е.Б., Голубев Ю.М., Ломакин А.В., Носкин В.А. // УФН. 1983. Т. 140. В. 4. С. 547-582.
- [4] Rosenblatt M., Van Ness J.W. // Ann. Math. Statist. 1965. V. 36. Р. 1120-1136.
- [5] Журбенко И.Г. Анализ стационарных и однородных случайных систем. М.: МГУ, 1987. 240 с.
- [6] Lii K.S., Rosenblatt M. // J. Theoretic. Probability. 1990. V. 3. N 2. Р. 367-385.
- [7] Алексеев В.Г. // Автметрия. 1990. В. 5. С. 23-28.
- [8] Алексеев В.Г. // Пробл. передачи информ. 1993. Т. 29. В. 2. С. 64-71.
- [9] Kim Y.C., Powers E.J. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1979. V. PS-7. N 2. Р. 120-131.
- [10] Оливер С.Д. В кн.: Спектроскопия оптического смешения и корреляция фотонов. / Под ред. Камминса Г. и Пайка Э. М.: Мир, 1978. 584 с.

Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского

Поступило в Редакцию  
4 января 1994 г.